

SUITES ARITHMETIQUES

Objectifs :

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique modélisant une évolution.
- Écrire le terme général d'une suite arithmétique définie par son premier terme et sa raison.
- Calculer la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique.
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Calculer la moyenne arithmétique de deux nombres.

Définition 1. Suite arithmétique

Soit r un nombre réel. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite définie pour tout entier naturel n par la relation : $u_{n+1} = u_n + r$
Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n) .



Méthode pour reconnaître une suite arithmétique



[méthode en vidéo](#)

Exercice ❶

Le chiffre d'affaires d'une entreprise s'accroît tous les ans de 50 000 euros. En 2008, le chiffre d'affaire était de 500 000 euros. On note $C_0 = 500\,000$. Déterminer l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n .

Propriété 1. Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique si, et seulement si, pour tout entier n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.



Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique



[méthode en vidéo](#)

Exercice 2

On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1. Montrer que la suite (C_n) est arithmétique.

Propriété 2. Terme général d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors :

- si le premier terme est u_0 , pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.
- si le premier terme est u_1 , pour tout entier n , $u_n = u_1 + (n-1)r$.



Méthode pour déterminer le terme général d'une suite arithmétique



[méthode en vidéo](#)

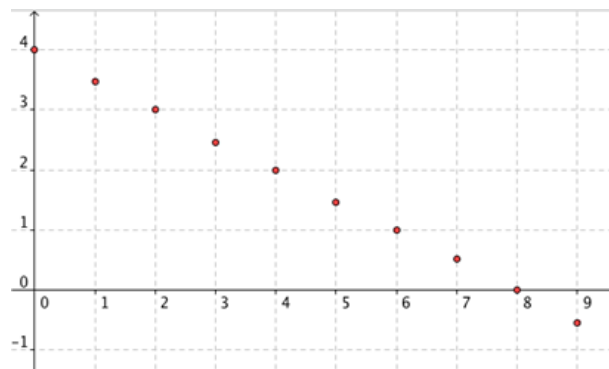
Exercice 3

On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1. Exprimer C_n en fonction de n .

Propriété 3. Représentation graphique d'une suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère du plan est constituée de points alignés.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0,5n + 4$.



Méthode pour reconnaître graphiquement une suite arithmétique



[méthode en vidéo](#)

Propriété 4. Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors (u_n) est croissante.
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.
- Si $r < 0$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0,5n + 4$ est décroissante car $-0,5 < 0$.



Méthode pour déterminer les variations d'une suite arithmétique



[méthode en vidéo](#)

Propriété 5. Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à :
$$\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$



Méthode pour calculer la somme des termes d'une suite arithmétique



[méthode en vidéo](#)

Exercice 4

Calculer la somme $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 88$.



[corrigé en vidéo](#)



Méthode pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1.

- 1) Déterminer le chiffre d'affaires total de l'entreprise au bout de 7 ans.
- 2) Déterminer le chiffre d'affaires total de l'entreprise entre la 5^{ème} année et la 10^{ème} année.

1) Le chiffre d'affaires total de l'entreprise au bout de 7 ans est égal à $C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_7$.

Utilisons une calculatrice :

- Pour accéder au catalogue : « 2nde » puis « 0 ».
- Appuyer sur « ln » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir « som(» ou « somme(» ou « sum(» (suivant les modèles).
- Procéder de même pour afficher « suite(» ou « seq(» (suivant les modèles).
- Et compléter pour afficher : $\text{som}(\text{suite}(500000+50000X, X, 0, 7))$

La calculatrice affiche ; donc **le chiffre d'affaires total de l'entreprise au bout de 7 ans est de euros.**

2) Le chiffre d'affaires total de l'entreprise entre la 5^{ème} année et la 10^{ème} année est égal à $C_5 + C_6 + C_7 + \dots + C_{10}$.

On saisit sur la calculatrice : `som(suite(500000+50000X,X,5,10))`

La calculatrice affiche ; donc **le chiffre d'affaires total de l'entreprise entre la 5^{ème} année et la 10^{ème} année est de euros.**

Remarque : Pour noter la somme $C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_7$, on peut utiliser le symbole $\sum$:

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_7 = \sum_{k=0}^7 C_k.$$



Johann Carl Friedrich Gauss
(Source : [Wikipédia](#))

Carl Fiedrich Gauss (1777-1855), surnommé « le prince des mathématiques », publia dès 1801 un important ouvrage de théorie des nombres « Disquisitiones arithmeticae ».

Une anecdote relate également comment Gauss sait faire preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune Gauss, alors âgé de 10 ans, impressionne son professeur en donnant la réponse correcte.

Définition 2. Moyenne arithmétique de deux nombres

La moyenne arithmétique de deux nombres est leur demi-somme.

Autrement dit, si a et b sont deux nombres réels, leur moyenne arithmétique est :

$$\frac{a+b}{2}.$$

Exercice ⑤

Calculer la moyenne arithmétique des nombres -5 et 23 .

Exercice ⑥

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive. Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de $3\,000$ m. Au « jour 1 », il court $3\,150$ m. Au « jour 2 », il court $3\,300$ m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.

On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

- 1) Calculer u_3 et u_4 .
- 2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
- 3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 4) Donner la variation de la suite (u_n) .
- 5) Exprimer u_n en fonction de n .
- 6) Quelle distance aura-t-il parcourue au total lorsqu'il sera au « jour 15 » de son entraînement ?
- 7) Quelle distance aura-t-il parcourue au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 » ?