# PROBABILITES CONDITIONNELLES

**Objectifs :**

- *Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.*
- *Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.*
- *Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.*
- *Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.*
- *Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.*

## 1. Activité d'approche d'une probabilité conditionnelle

Lors d'une vente promotionnelle dans une boutique, une étude sur 200 clients a montré que :
- 120 clients achète un tee-shirt.
- Parmi les autres clients, 40 achètent un jean.
- Parmi les clients qui achètent un tee-shirt, 24 achètent un jean.

On consulte, au hasard, la fiche d'un client. On considère les évènements :
*A* : « le client achète un tee-shirt »
*B* : « le client achète un jean »

1) Calculer la probabilité $p(A)$ que le client achète un tee-shirt.

2) En déduire la probabilité $p(\overline{A})$ que le client n'achète pas de tee-shirt.

3) Compléter le tableau ci-dessous, donnant la répartition des fiches, en effectif, sachant que le client achète ou non un tee-shirt :

| | Achète un tee-shirt | N'achète pas de tee-shirt | Total |
|---|---|---|---|
| Achète un jean | | | |
| N'achète pas de jean | | | |
| Total | | | |

4) On sait que la fiche choisie est celle d'un client achète un tee-shirt. Quelle est la probabilité qu'il achète un jean ?

**Définition 1.** ***Probabilité conditionnelle***

**On appelle probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$ la probabilité que l'événement $B$ se réalise sachant que l'événement $A$ est réalisé. Elle est notée $p_A(B)$**

5) Parmi les clients qui n'achètent pas de tee-shirt, calculer la probabilité $p_{\overline{A}}(B)$ de ceux qui achètent un jean.

6) Donner la probabilité $p(A\cap B)$ que le client achète ***à la fois*** un tee-shirt et un jean.

7) Calculer $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$. Que remarque-t-on ?

**Propriété 1.** ***Probabilité conditionnelle***

$$\text{............} = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \quad \text{ou} \quad p(A\cap B) = p(A)\times \text{................}$$

**Exercice ❶**

Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % d'hommes et parmi ceux-là, 12,5 % sont des cadres.
Par ailleurs, 87,5 % des femmes de cette entreprise sont ouvrières ou techniciennes.

1) Compléter le tableau suivant :

| | Hommes (H) | Femmes (F) | Total |
|---|---|---|---|
| Cadres (C) | | | |
| Ouvriers, techniciens (O) | | | |
| Total | | | |

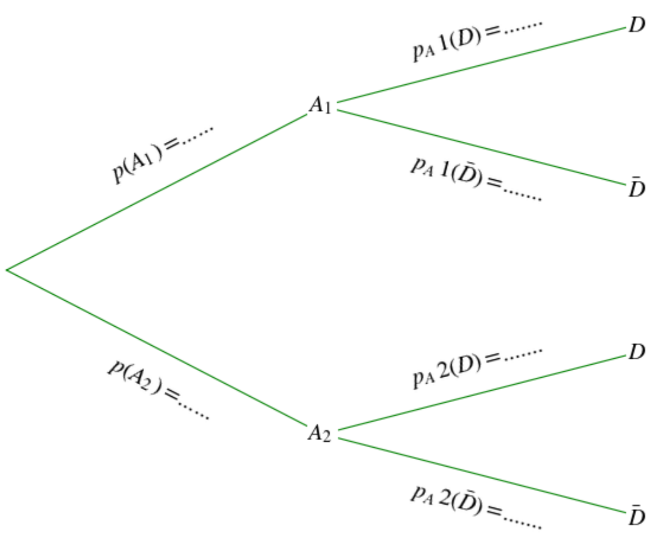
2) Déterminons la probabilité de rencontrer un cadre sachant c'est un homme.

## 2. Arbre pondéré

Deux ateliers produisent des paires de chaussures. Le premier atelier produit 6 000 paires. Le deuxième produit 4 000 paires. 120 paires sont défectueuses et proviennent du premier atelier. Si on ne prélève que des paires venant du deuxième atelier, la probabilité qu'une paire soit défectueuse est égale à 0,3.

On choisit, au hasard, une paire de chaussures. On considère les évènements :
$A_1$ : « la paire de chaussure provient du premier atelier »
$A_2$ : « la paire de chaussure provient du deuxième atelier »
$D$ : « la paire de chaussure est défectueuse »

1) Quelle est la probabilité qu'une paire soit défectueuse sachant qu'elle provient du premier atelier ?
2) Compléter l'arbre pondéré suivant :



À partir du nœud "On extrait une paire de chaussure de l'atelier 1", on a : $p_{A_1}(\overline{D}) + ...... = ......$

Donc $p_{A_1}(\overline{D}) = ...... - ...... = ......$.

**Règle 1.** ***Arbre pondéré***

**Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à ………...**

3) Quelle est la probabilité qu'une paire de chaussures soit défectueuse et provienne du deuxième atelier ?

**Règle 2.** ***Arbre pondéré***

**Dans un arbre pondéré, pour calculer la probabilité d'un chemin, on ………………… les probabilités des branches de ce chemin.**

4) Quelle est la probabilité qu'une paire de chaussures soit défectueuse ?

**Règle 3 :** ***formule des probabilités totales***

**La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la ………… des probabilités de chacun de ces chemins.**

**Exercice ❷**

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie.

• On estime que 12 %  des bovins ont la maladie M.
• Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95% des cas.
• 98% des bêtes saines ne réagissent pas au test.

Soit M l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie M », et, T l'évènement : « le test est positif ».

1) Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
2) On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3) On veut déterminer la fiabilité de ce test. C'est à dire calculer la probabilité :
   a) pour un animal d'être malade si il réagit au test.
   b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

**Définition 2.** ***Événements indépendants***

**Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle de $\Omega$.**
**On dit que $A$ et $B$ sont indépendants lorsque $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$.**

*Exemple* : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit $R$ l'événement « On tire un roi ».
Soit $T$ l'événement « On tire un trèfle ».

On a $P(R) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

De plus, $P_T(R)$ est la probabilité de tirer un ……… parmi les …………...

On obtient alors : $P_T(R) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Comme $P_T(R)\ldots\ldots P(R)$, alors les événements *R* et *T* ………………… indépendants

corrigé en vidéo

**Exercice ❸**

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons :
- Trois jetons rouges marqués 1, 2, 3 ;
- Deux jetons bleus marqués 1, 2 ;
- Un jeton vert marqué 1.

On considère les événements *R* : « le jeton est rouge », *U* : « le numéro est 1 » et *D* : « le numéro est 2 ».

1) Les événements *R* et *U* sont-ils indépendants ?
2) Les événements *R* et *D* sont-ils indépendants ?

**Exercice ❹**

Dans une population, un individu est atteint par la maladie a avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie b avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit *A* l'événement « L'individu a la maladie $a$ ».
Soit *B* l'événement « L'individu a la maladie $b$ ».
On suppose que les événements *A* et *B* sont indépendants.

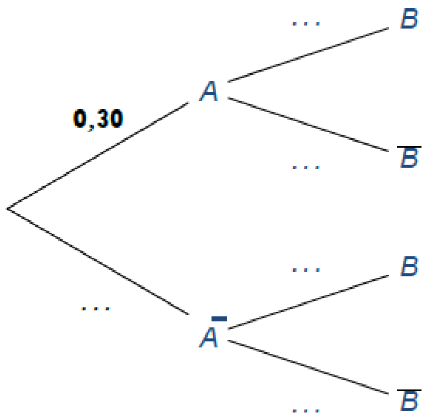
1) Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies.
2) Calculer $P(A \cup B)$. Interpréter le résultat.

corrigé en vidéo

**Exercice ❺**

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres n'en contiennent pas.
30 % des dragées contiennent une amande ;
40 % des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
75 % des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.
Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.
On note :
- *A* l'évènement « La dragée choisie contient une amande » ;
- $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement *A* ;
- *B* est l'évènement « La dragée choisie est bleue ».

1) Déterminer la probabilité de l'évènement *A*.
2) Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.




3) Décrire l'évènement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0,12.
4) Calculer $P(B)$.

5) Sachant que Sophie choisit une dragée bleue, quelle est la probabilité, que cette dragée contienne une amande ? Arrondir la réponse à 0,01.
6) Les évènements *A* et *B* sont-ils indépendants ?