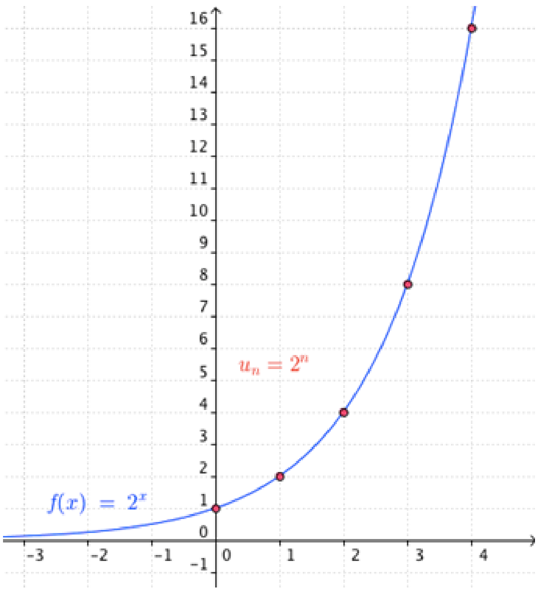
FONCTIONS EXPONENTIELLES

Objectifs :

• Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$ selon le signe de k et les valeurs de a.
• Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.
• Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

1. Fonction exponentielle de base *a*

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base a. Ainsi par exemple :
- pour une suite, on a $u_4 = 2^4$
- pour une fonction, on a $f(4) = 2^4$, mais on a aussi $f(3{,}9) = 2^{3,9}$.
Et de façon générale, on $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.



Définition 1. *Fonction exponentielle de base a*

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a.

C. Lainé

Propriété 1.

Soit a un réel strictement positif. $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

Exemple : La fonction exponentielle de base 2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2^x$.

D'après la représentation graphique précédente, on remarque que la courbre représentant la fonction exponentielle de base 2 est au-dessus de l'axe des abscisses pour tout réel x.
Par suite, le fonction exponentielle de base 2 est stristement positive sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2. *Signe de la fonction exponentielle de base a*

La fonction exponentielle de base a est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 3.

Soient x et y deux réels, et a un réel strictement positif.

- $a^x\times a^y=a^{x+y}$ **(relation fonctionnelle)**
- $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
- **Pour tout entier relatif n,** $\left(a^x\right)^n=a^{nx}$

Exercice ❶

Simplifier les expressions suivantes : $A=4^{-3}\times 4^{-5}$; $B=\dfrac{3^3\times 3^{-2,5}}{9^5}$; $C=\left(4,8^{-2,1}\right)^3\times 4,8^{6,2}$.

[corrigé en vidéo]

Exercice ❷

Écrire chaque nombre sous la forme 2^x ou 3^x ou 5^x, x étant un nombre réel.

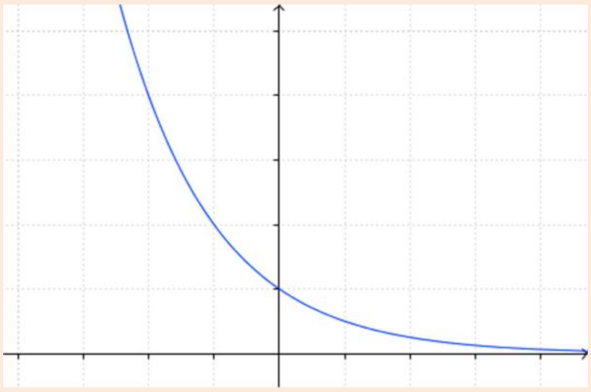
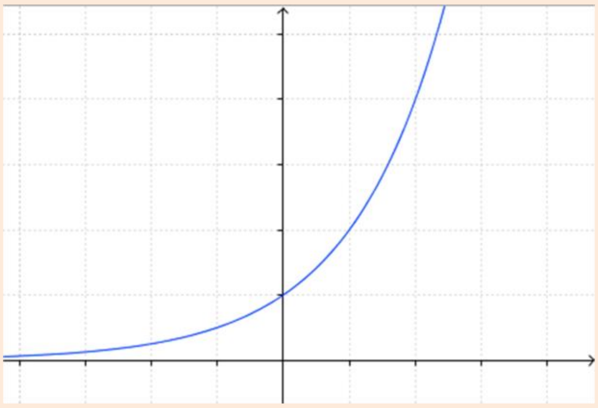
$A=\left(5^x\right)^2\times 25^2$; $B=\dfrac{\left(4^x\right)^2\times 2^{1-x}}{2^3}$; $C=\dfrac{\left(3^x\right)^3\times 9^{x+2}}{81}$.

C. Lainé

2. Variations de la fonction exponentielle de base a

Propriété 3. *Variations de la fonction exponentielle de base a*

Soit a un réel strictement positif.

<table>
<tr><td>• Si $0 < a < 1$, la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">• Si $a = 1$, la fonction exponentielle de base a est constante sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>• Si $a > 1$, la fonction exponentielle de base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
</table>

Exercice ❸

Déterminer le sens de variations de chaque fonction suivante :

a) $f : x \mapsto 3^x$; b) $g : x \mapsto 0{,}6^x$; c) $h : x \mapsto \dfrac{3^x}{4^x}$.

corrigé en vidéo

Remarque : Quel que soit le réel a strictement positif, la fonction exponentielle de base a passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$. En effet, $a^0 = 1$.

Exercice ❹

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par

$f(x) = 50\ 000 \times 1{,}15^x$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
2) Déterminer les variations de f sur $[0\ ;\ 10]$.

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

corrigé en vidéo

Exercice ❺
Au mois de décembre 2019, le chiffre d'affaires hors taxe d'un magasin spécialisé dans la vente de téléphones portables était de 200 000 €.
Pour l'année 2020, le responsable du magasin prévoit un taux d'augmentation du chiffre d'affaires hors taxe de 8 % par mois.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 12]$ donnant le chiffre d'affaires pour un mois x :
$f(x)$ est de la forme $f(x) = k \times a^x$.

1) Déterminer les valeurs de k et de a.
2) En déduire le chiffre d'affaires prévu pour le mois d'août
3) Pour quel mois de l'année 2020, le chiffre d'affaires sera presque le double de celui de décembre 2019 ?

3. Taux d'évolution moyen

Propriété 4. ***Résolution d'une équation de la forme $x^n = a$***

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0\ ;+\infty[$, le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ appelé racine n-ième du nombre a.

Exemple : $x^3 = 27$ équivaut à $x = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Exercice ❻
Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

corrigé en vidéo

Exercice ❼
Tous les ans à partir de fin novembre, des volontaires d'une organisation non gouvernementale de la protection de la nature parcourent les côtes de la Californie pour estimer le nombre de papillons Monarques : il s'agit d'une espèce de papillons qui viennent y passer l'hiver. On dispose des données suivantes :

Année	1997	2000	2006	2012	2019
Nombre de papillons Monarques en milliers	1 300	400	200	90	50

1) Calculer le taux d'évolution global du nombre de papillons Monarques entre 1997 et 2019.
2) Montrer que le taux d'évolution annuel moyen du nombre de papillons Monarques entre 1997 et 2019 est – 13,8 %.