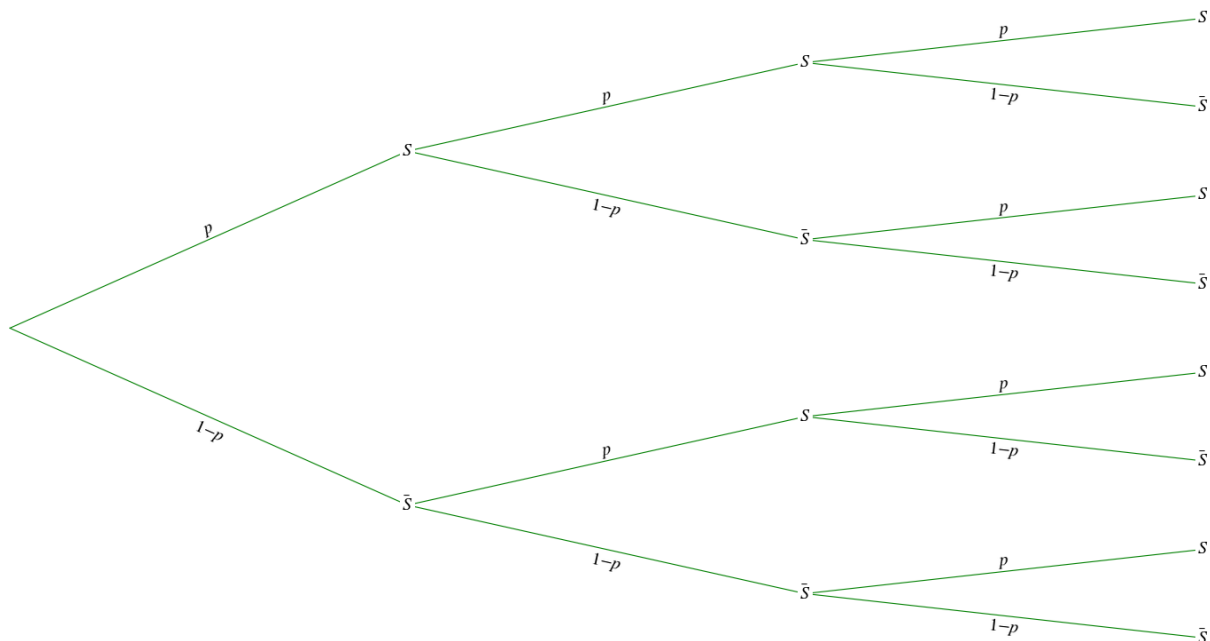


VARIABLES ALÉATOIRES (PARTIE 2)

Objectifs :

- Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour $n \leq 10$.
- Lorsque la variable aléatoire X suit une loi binomiale, calculer la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des coefficients binomiaux.

Dans l'arbre de probabilité suivant, on obtient les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p .



Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

On remarque qu'il y a chemins conduisant à deux succès, c'est-à-dire aux issues Par symétrie, il y a aussi trois chemins menant à deux échecs, c'est-à-dire aux issues $(S, \bar{S}, \bar{S})$, $(\bar{S}, \bar{S}, S)$ et $(\bar{S}, S, \bar{S})$.

On peut ainsi formuler qu'il y a autant de chemins conduisant à k succès qu'à k échecs, où k est un entier compris entre 0 et 3.



[calculer une probabilité à l'aide d'un arbre](#)

Définition 1. Coefficient binomial

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p .

Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

On appelle coefficient binomial le nombre de chemins à k succès dans l'arbre pondéré. Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Exemple : Reprenons l'exemple précédent de ce paragraphe.

On a alors $\binom{3}{2} = \dots\dots$.

Exercice ❶

Reprenons l'arbre pondéré précédent. Déterminer les nombres suivants : $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$ et $\binom{3}{3}$.

Propriétés 1. Propriétés des coefficients binomiaux

Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$.

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstrations : • $\binom{n}{0}$ est le nombre de chemins du schéma de Bernoulli conduisant à

succès, donc à échecs. Il y en a : Ainsi, on a bien $\binom{n}{0} = \dots\dots$

• $\binom{n}{n}$ est le nombre de chemins du schéma de Bernoulli conduisant à succès. Il y en a

un : Ainsi, on a bien $\binom{n}{n} = \dots\dots$

• $\binom{n}{1}$ est le nombre de chemins du schéma de Bernoulli conduisant à succès. Il y en a

..... qui correspondent aux places possibles pour l'unique succès. Ainsi, on a bien

$\binom{n}{1} = \dots\dots$

• $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins conduisant à k succès. Il y a alors $n - k$ échecs. Mais, il y a

autant de chemins qui réalisent k succès que de chemins qui réalisent k échecs, c'est-à-dire

$n - k$ succès. Or $\binom{n}{n-k}$ est le nombre de chemins conduisant à $n - k$ succès.

Par conséquent, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exercice 2 : Calculer $\binom{25}{24}$ sans calculatrice.

$$\binom{25}{24} = \binom{25}{25-1} = \binom{25}{1} = 25.$$



[corrigé en vidéo](#)

Remarques :



La fonction se nomme "COMBIN".

Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : =COMBIN(25;24)



La fonction se nomme "combinaison" ou "nCr".

Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : 25combinaison24 ou 25nCr24 suivant le modèle de calculatrice.

Propriété 2. Formule de Pascal

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

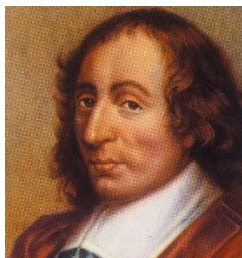
Démonstration : Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$. Réalisons $n+1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de chemins conduisant à $k+1$ succès pour ces $n+1$ répétitions est égal à $\binom{n+1}{k+1}$.

Parmi ces chemins, il y en a de deux catégories disjointes :

- ceux qui commencent par un succès : l'arbre représentant les épreuves suivantes (de la deuxième à la dernière) est alors un arbre de n épreuves, où il reste à choisir k succès : il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins possibles de cette catégorie.
- ceux qui commencent par un échec : l'arbre représentant les épreuves suivantes (de la deuxième à la dernière) est alors un arbre de n épreuves, où il reste à choisir $k+1$ succès : il y a donc $\binom{n}{k+1}$ chemins possibles de cette catégorie.

Ces catégories étant disjointes, on peut conclure que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ chemins donnent $k+1$ succès en $n+1$ répétitions.

Par conséquent, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.



Source : wikipédia

Blaise Pascal (1623 -1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français. Les premiers travaux de Pascal concernent les [sciences naturelles](#) et appliquées. Il contribue de manière importante à l'étude des [fluides](#). Il a clarifié les concepts de [pression](#) et de [vide](#), en étendant le travail de [Torricelli](#). Pascal a écrit des textes importants sur la [méthode scientifique](#).

En 1641, il invente la première machine à calculer et après trois ans de développement et 50 prototypes, il la présente à ses contemporains en la dédiant au [chancelier Séguier](#). Dénommée *machine d'arithmétique*, puis roue pascaline et enfin [pascaline](#), il en construisit une vingtaine d'exemplaires dans la décennie suivante.

Mathématicien de premier ordre, il crée deux nouveaux champs de recherche majeurs : tout d'abord il publie un traité de [géométrie projective](#) à seize ans ; ensuite il développe en 1654 une méthode de résolution du « [problème des partis](#) » qui, donnant naissance au cours du XVIII^e siècle au calcul des [probabilités](#), influencera fortement les [théories économiques](#) modernes et les [sciences sociales](#).

Exercice ③ : Calculer $\binom{4}{2}$ sans calculatrice.



[corrigé en vidéo](#)

Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la formule de Pascal.

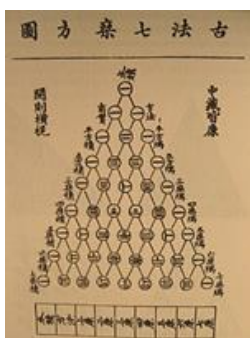
Le triangle de Pascal [est utilisé pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux](#).

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

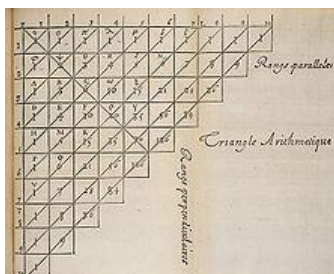
La ligne 2 contient $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$.

En appliquant la propriété $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, on obtient de proche en proche les nombres sur les lignes suivantes.

Ainsi, on a : $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$; d'où on obtient le 6 de la ligne 4 en ajoutant deux nombres de la ligne 3 et ainsi de suite de proche en proche.



Cet algorithme de calcul est présent en Chine au XIV^e siècle, mais Pascal a systématisé son étude et montré toutes ses ressources.



Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stifel (1543) et des Chinois (1303).

[Le triangle de Pascal](#) vu sur le site de Thérèse Eveillau

Exercice 4

Voici la ligne $n = 6$ du triangle de Pascal. Compléter la ligne $n = 7$.

$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n = 7$								

Propriété 3. Calculer une probabilité avec une loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. Si X suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n; p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que X soit égale à k est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 5

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(9; 0,3)$. Sachant que $\binom{9}{2} = 36$, calculer $P(X = 2)$.

Exercice 6

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(14; 0,9)$. Calculer $P(X \geq 13)$.

Exercice 7

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

- 1) Prouver que X suit une loi binomiale.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.



[corrigé en vidéo](#)