

VARIABLES ALÉATOIRES (PARTIE 1)

Objectifs :

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.
- Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres.

1. Espérance d'une variable aléatoire

Définition 1. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- faire une partition de l'univers Ω avec les événements constitué par les différentes issues possibles de l'expérience : $x_1, x_2, \dots, x_n$,
- déterminer les probabilités de chacun de ces événements : $p_1, p_2, \dots, p_n$,
- consigner ces résultats dans un tableau tel que celui-ci :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Remarque : On obtient : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Définition 2. Espérance mathématique, variance et écart-type

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exercice 1

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. » On considère le jeu suivant :

- ♦ Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- ♦ Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- ♦ Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.



Exercice ②

Une salle de sport propose trois salles d'entraînement : la salle FIT, la salle STRONG et la salle ZEN. On ne peut s'inscrire que dans une seule des salles, mais on peut disposer en plus de séances de coaching personnalisé.

Parmi les 500 adhérents, 225 sont inscrits à la salle FIT, 60 à la salle ZEN et les autres à la salle STRONG.

Parmi les utilisateurs de la salle FIT, 9 sont inscrits au coaching, comme 43 des utilisateurs de la salle STRONG et 48 de la salle ZEN.

Un abonnement mensuel à la salle FIT coûte 60 €, celui à la salle STRONG coûte 40 € et celui à la la salle ZEN coûte 50 €.

De plus, pour disposer d'un coaching personnalisé, l'adhérent devra payer 20 €.

On appelle X la variable aléatoire donnant le coût mensuel, en euro, de l'abonnement d'un adhérent choisi au hasard dans la salle de sport.

- 1) Établir un tableau des effectifs décrivant la répartition des abonnés.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice ③

Dans une urne, il y a 15 boules dont 3 boules rouges, 7 boules vertes et 5 boules jaunes. Un joueur tire une boule au hasard :

- si elle est rouge, il perd 50 €
- si elle est verte, il gagne 20 €
- si elle est jaune, il gagne x €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une boule tirée associe un gain ou une perte.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance de X en fonction de x .
- 3) Déterminer x pour que le jeu soit équitable.

2. Schéma de Bernoulli. Loi binomiale

Définition 3. *Epreuve de Bernoulli*

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; on nomme l'une de ces issues « succès », que l'on note S , et l'autre « échec », que l'on note $\bar{S}$.

Exemple : On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

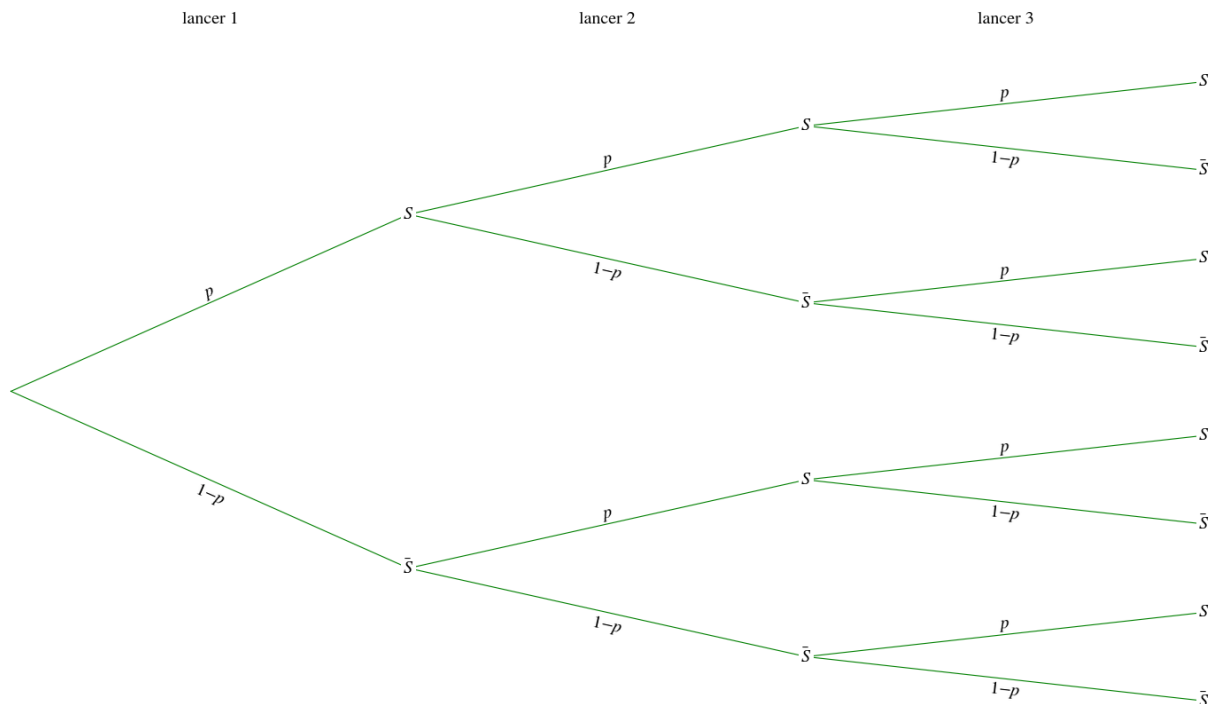
Définition 4. *Schéma de Bernoulli*

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p toute expérience aléatoire qui consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli (de paramètre p) identiques et indépendantes.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$.

En effet, on répète $\dots$ fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dots$, égale à la probabilité d'obtention du chiffre 6 lors d'un lancer du dé.



On obtient par exemple : $p(S, S, S) = \dots^3 = (\dots)^3 = \dots$



[calculer une probabilité à l'aide d'un arbre](#)

Définition 5. Loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p .

Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre total de succès.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p . On la note $\mathcal{B}(n; p)$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers. Alors X suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(\dots; \dots)$.



Méthode pour calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide de la calculatrice T.I.



Exercice 4

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

- Quelle est la loi suivie par X ?
- Calculer la probabilité $P(X = 5)$.
- Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$.
- Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$.

Exercice 9

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

- Prouver que X suit une loi binomiale.
- Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.



Propriété. Espérance d'une loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$
Si X suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n; p)$, alors $E(X) = np$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. $E(X) = np = \dots \times \dots = \dots$.

Remarque : On peut remarquer que la formule de l'espérance peut s'expliquer sans calcul. En effet, chaque épreuve de Bernoulli a une espérance de succès égale à p donc, en la répétant n fois, on peut espérer obtenir en moyenne $n \times p$ succès.

Exercice 6

Une entreprise produit des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise, 8 stylos.

- Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de stylos présentant un défaut. Quelle est la loi suivie par X ?
- Calculer la probabilité des événements suivants (arrondir les résultats au millième) :
 - A : « Il y a exactement deux stylos avec un défaut »
 - B : « Il y a au moins un stylo avec un défaut ».
- Quel nombre de stylos présentant en moyenne un défaut, l'entreprise peut-elle espérer obtenir ?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$.

- Saisir dans la cellule B1, la formule **=LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)**
- Recopier cette formule vers le bas.

2) Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.