FONCTION LOGARITHME DECIMAL

Objectifs :

- *Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.*
- *Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.*

C'est vers 1614 que l'écossais John Napier, ou Néper en France, (1550-1617) invente les logarithmes qui portent son nom, sous une forme un peu différente de ce qui est fait dans ce chapitre.

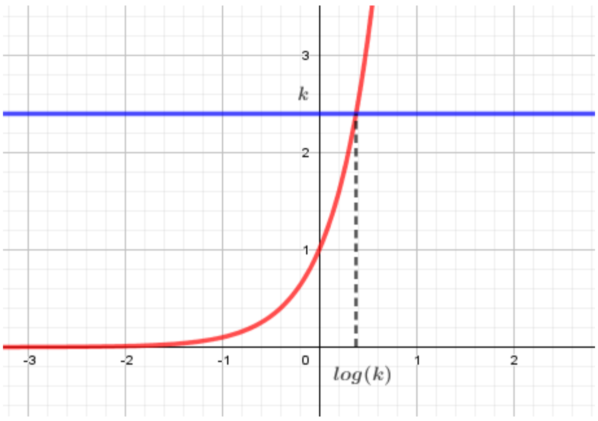
(le terme provient, du grec *logos* = logique, raison et *arithmos* = nombre).

Son objectif était de simplifier les calculs trigonométriques de l'astronomie (trigonométrie sphérique) en remplaçant les multiplications et divisions par des additions et soustractions.

http://www.bibmath.net

1. La fonction logarithme décimal

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



L'équation $10^x = k$, avec k un réel strictement positif, admet ……………. solution dans $\mathbb{R}$, qui se note ………….

Définition 1. *Fonction logarithme décimale*

On appelle logarithme décimal d'un réel strictement positif k, l'unique solution de l'équation ………….. On note cette solution …………. ».

La fonction logarithme décimal, notée ………, est la fonction qui, à tout réel strictement positif x associe ………..

C. Lainé

C'est Henry Briggs qui inventa les logarithmes décimaux vers 1617.

On en déduit les propriétés suivantes :

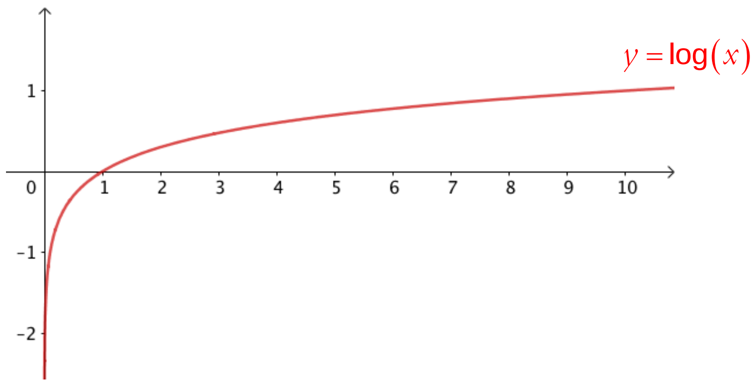
Propriété 1. *Conséquences de la définition*

- **Pour tout réel k strictement positif, $10^x = k$ équivaut à …………..**
- $\log(1) = ...$; $\log(10) = ...$; $\log\left(\frac{1}{10}\right) = ...$
- **Pour tout réel x strictement positif, $10^{\log(x)} = ...$.**
- **Pour tout réel x, $\log(10^x) = ...$.**

Exemples : $10^{\log(4)} = ...$; $\log(10^{-5}) = ...$.

Propriété 2. *Sens de variation de la fonction log*

La fonction logarithme décimal est strictement …………………….. sur $]0\ ;+\infty[$.



2. Propriétés de la fonction logarithme décimal

Théorème. *Relation fonctionnelle*

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\log(a \times b) = ...$.

Exemple : $\log(6) = \log(...... \times ......) = \log(......) + \log(......)$.

Propriétés 3. ***Corollaires de la relation fonctionnelle***

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
- **pour tout entier n naturel,** $\log\left(a^n\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

log(😅) = 💧 log(😄)

Exemples : $\log\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\log(8) = \log(\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice ❶

Simplifier les expressions suivantes : $\log\left(2+\sqrt{2}\right)+\log\left(2-\sqrt{2}\right)$, $2\log(3)+\log(2)-4\log(3)$ et $\log\left(10^3\right)+\log\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

Exercice ❷

Simplifier les expressions suivantes : $A=\log\left(10^{5,1}\right)$; $B=\log\left(10^{-0,1}\right)$; $C=\log(1\,000\,000)$; $D=\log(0{,}000\,000\,01)$; $E=\log(15)+\log(3)$ et $F=5\log\left(10^2\right)$.

3. Résolutions d'équations et d'inéquations

Propriété 4. ***Résolution d'équation et d'inéquation***

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- $\log(x)=\log(y)$ **équivaut à** $x=y$
- $\log(x)<\log(y)$ **équivaut à** $x<y$

Exercice ❸

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x = 2$.
2) Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation : $x^5 < 3$.

Exercice ❹

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes : a) $0{,}1^x = 3$; b) $500 \times 0{,}8^x = 10$.

Exercice ❺

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes : a) $5^x \geq 1\,000$; b) $10 \times 0{,}8^x < 0{,}4$.

Exercice ❻

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de premier terme $u_0 = 1\,000$.
Déterminer le premier terme de la suite immédiatement supérieur à 1 300.

Exercice ❼

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $v_0 = 5$.
Déterminer le premier terme de la suite immédiatement inférieur à 0,5.

Exercice ❽

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4 % par an.
En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.

1) Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015+n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire u_n en fonction de n.

2) À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 % ?

Exercice ❾

Par un après-midi estival où la température avoisine 30 °C, un aliment a été retiré d'un congélateur et exposé à la température ambiante. Sa température T (en °C) augmente alors en fonction du temps t (en min) selon la formule : $T(t) = 30 - 48 \times 0,9^t$.

1) Quelle était la température de l'aliment à la sortie du congélateur ?
2) Quelle est-elle au bout de 5 minutes ?
3) Au bout de combien de temps sera-t-elle supérieure à 20 °C ?

Exercice ❿

8 augmentations successives de t % correspondent à une augmentation globale de 30 %.
Donner une valeur approchée du taux moyen t.

Exercice ❶❶

On a relevé la population d'une grande métropole sur 50 ans tous les 5 ans. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Année x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Population en milliers y_i	19,4	19,4	27,6	40,3	50	59	69	87	132	166	216

1) Représenter le nuage de points dans un repère.
2) a) On effectue le changement de variable $z = \log(y)$. Compléter le tableau suivant :

x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
z_i											

b) Représenter un nouveau nuage de points à partir des données des variables x et z.

c) A l'aide la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite d'ajustement sur le nuage de points précédent.

3) a) En déduire l'expression de y en fonction de x, puis tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $y = f(x)$ dans le repère contenant le premier nuage de points.

b) En admettant que le modèle mathématique reste valable en dehors du domaine d'étude, extrapoler le nombre d'habitants 5 ans après l'étude.