FONCTION INVERSE

Objectifs :

• *Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.*

1. La fonction inverse et sa représentation graphique

Le partage équitable de 1 kg d'or entre 3 personnes, donne à chacune : …… kg.

Le partage équitable de 1 kg d'or entre 7 personnes, donne à chacune : …… kg.

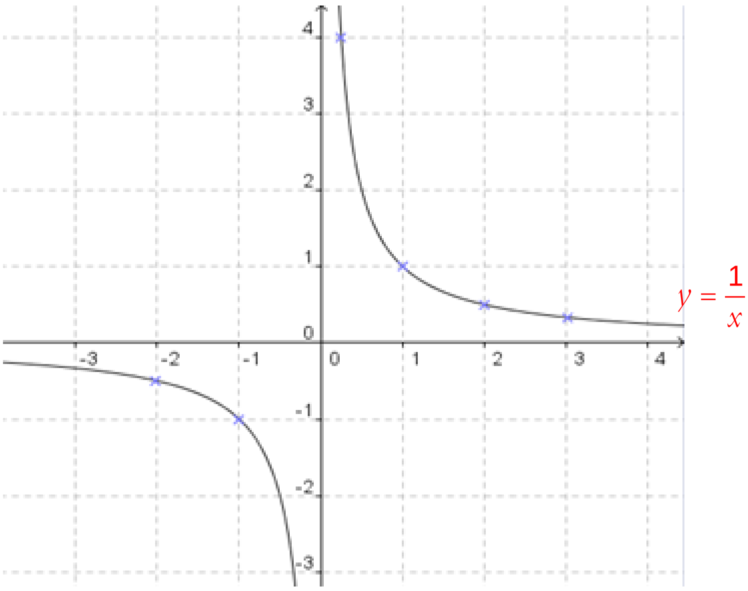
Le partage équitable de 1 kg d'or entre x personnes, donne à chacune : …… kg.

Définition 1. *Fonction inverse*

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel x différent de 0, associe ……...

A l'aide de la calculatrice, complétons le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	0	$0,25$	$0,5$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	……	……	……	……	……		……	……	……	……	……



Remarque : La représentation graphique de la fonction inverse, appelée ………….. de centre O, est …………………….. par rapport à …………………………

C. Lainé

2. Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

A l'aide de la calculatrice, complétons le tableau suivant :

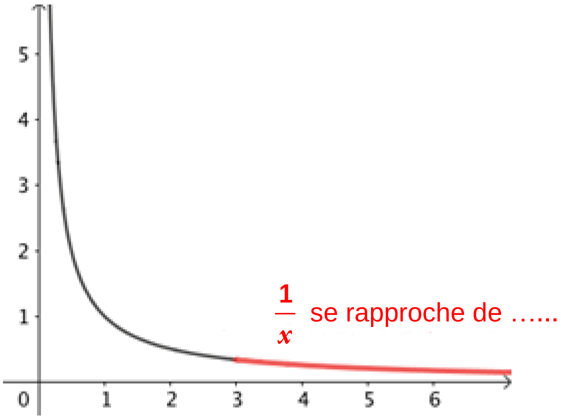
x	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\frac{1}{x}$	……	……	……	……	……

Lorsque x devient de plus en plus grand, $\frac{1}{x}$ se rapproche de …….

On dit que la limite de la fonction inverse lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à ……, que l'on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de la fonction inverse se rapproche de plus en plus de …………………..

………………………..



A l'aide de la calculatrice, complétons le tableau suivant :

x	$-1\ 000\ 000$	$-1\ 000$	-10
$\frac{1}{x}$	……	……	……

Lorsque x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ se rapproche de ……..

On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus « grandes dans les négatifs », la courbe de la fonction inverse se rapproche de plus en plus de ……………..

………………………..

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 1. ***Asymptote horizontale***

On dit alors que l'axe des abscisses est une ……………………………….. à la courbe représentant la fonction inverse en $+\infty$ et en $-\infty$.

A l'aide de la calculatrice, complétons le tableau suivant :

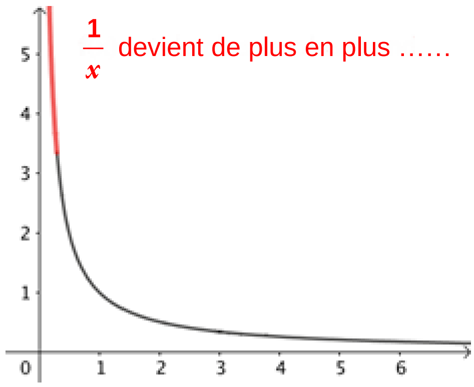
x	0,01	0,001	0,000 001
$\frac{1}{x}$	……	……	……

Lorsque x se rapproche de 0 en étant positives, $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus ……………..

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Graphiquement, pour des valeurs positives de plus en plus en proches de 0, la courbe de la fonction inverse se rapproche de plus en plus de

……………………………...



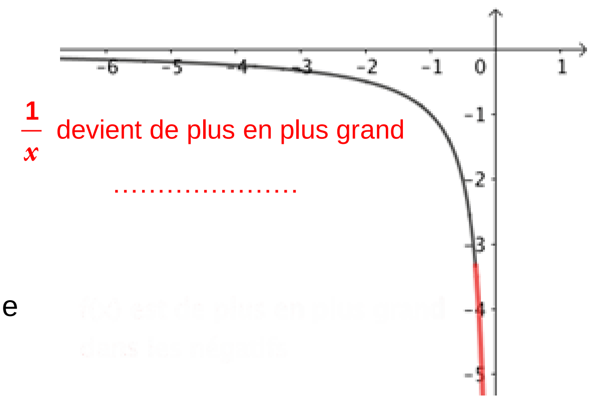
A l'aide de la calculatrice, complétons le tableau suivant :

x	–0,000 001	–0,001	–0,1
$\frac{1}{x}$	……	……	……

Lorsque x se rapproche de 0 en étant négatives, $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus grand en étant ………………...

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

Graphiquement, pour des valeurs négatives de plus en plus en proches de 0, la courbe de la fonction inverse se rapproche de plus en plus de ……………………………...



On en déduit la propriété suivante :

Propriété 2. ***Asymptote verticale***

On dit que l'axe des ordonnées est une …………………………………… à la courbe représentant la fonction inverse.

C. Lainé

3. Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

Propriété 3. ***Dérivée de la fonction inverse***

La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par

$f'(x)=$................ .

Pour tout réel x différent de 0, $-\dfrac{1}{x^2}$ est toujours strictement …………… On en déduit que :

Propriété 3. ***Variations de la fonction inverse***

La fonction inverse est strictement …………………………….. sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		‖	

Exercice ❶

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, puis les écrire sous forme d'un quotient lorsque cela est possible.

a) $f(x)=\dfrac{3}{x}$; b) $g(x)=-\dfrac{2}{x}$; c) $h(x)=-2x+\dfrac{8}{x}$

Exercice ❷

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1-2x-\dfrac{2}{x}$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

correction en vidéo

Exercice ❹

Un artisan fabrique des meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués peut être modélisé par la fonction C définie par : $C(x)=x^2+50x+900$.

1) Calculer le coût de production de 20 meubles
2) Calculer le coût de production, par meuble, lorsque l'artisan fabrique 20 meubles.
3) Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour x meubles fabriqués.

Montrer que $f(x)=x+50+\dfrac{900}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,60]$.

4) Justifier que, pour tout x de $[10\ ;\ 60]$, $f'(x)=\dfrac{(x+30)(x-30)}{x^2}$.

5) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[10\ ;\ 60]$.

6) En déduire le tableau de variations de f sur $[10\ ;\ 60]$.

7/ Quel nombre de meubles doit fabriquer l'artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ?

C. Lainé