

CORRECTIONS

Terminale Spé maths

Vrai ou faux

Vrai ou faux 1

Affirmation 1 : Fausse

Étudions les variations de la fonction f .

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout t réel positif, on pose : $u(t) = -0,5t^2 + t + 2$, donc on a $u'(t) = -t + 1$.

On a donc, pour tout réel t positif : $f'(t) = 0 - (-t + 1)e^{-0,5t^2+t+2} = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$

La fonction exp étant à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(t)$ est le signe de $(t-1)$: c'est donc strictement négatif sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et strictement positif sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$: c'est pourquoi il est faux de dire que la population augmente en permanence : au cours de la première heure, la population décroît, strictement.

Affirmation 2 : Fausse

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e^{-0,5t^2+t+2} > 0 &\implies -e^{-0,5t^2+t+2} < 0 \\ &\implies e^3 - e^{-0,5t^2+t+2} < e^3 \\ &\implies f(t) < e^3\end{aligned}$$

Or $e^3 \approx 20,086$ (à 10^{-3} près, arrondi par excès), donc la fonction f est majorée par 20,086, ce qui s'interprète en disant que la population restera inférieure à 20,086 milliers d'individus, soit 20 086 bactéries : la population ne dépassera donc jamais 21 000.

Affirmation 3 : Vraie

Une population de bactéries de 10 000 individus à l'instant t , c'est équivalent à avoir $f(t) = 10$.

On cherche donc à savoir combien d'antécédents 10 a par la fonction f .

En reprenant l'étude des variations de f : on a établi que f était strictement décroissante sur $[0 ; 1]$, puis strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

Étudions la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,5t^2 + t + 2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,5t^2 \left(1 - \frac{2}{t} - \frac{4}{t}\right) = -\infty$, par limite de quotient, somme et produit de suites de références.

Par composition, en posant $y = -0,5t^2 + t + 2$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t^2+t+2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$

Finalement, par limite de la somme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = e^3$.

Pour rappel, on a $e^3 \approx 20,086 > 10$.

Par ailleurs : $f(0) = e^3 - e^2 \approx 12,696 > 10$ et $f(1) = e^3 - e^{2,5} \approx 7,903 < 10$.

On peut donc dire :

- Sur $[0 ; 1]$, f est une fonction continue (car dérivable), et strictement décroissante, et 10 est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(1)$, donc en vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
- Sur $]1 ; +\infty[$, f est une fonction continue (car dérivable), et strictement croissante, et 10 est une valeur intermédiaire strictement comprise entre $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = f(1)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, donc en vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(t) = 10$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}^+$ et donc il y a exactement deux instants où la population de bactéries aura un effectif de 10 000 individus.

Vrai ou faux 2

1. Affirmation 1 : Vraie

Pour tout entier naturel $n : n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$ et $-\frac{1}{n+1} \geq -1$.

De plus, pour tout entier naturel n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

D'où $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ car $n+1 > 0$

finalement on a : $-1 \leq \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$.

La suite u est bornée par -1 et 1.

2. Affirmation 2 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

Cette suite est bornée par -1 et 1 mais elle n'est pas convergente.

3. Affirmation 3 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\frac{1}{n}$.

Cette suite est croissante et converge vers 0.

4. Affirmation 4 : Fausse

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut déterminer le signe de sa dérivée seconde.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$. On a $u'(x) = 2x + 2$.

$f' = \frac{u'}{u}$ donc, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

f' est de la forme $\frac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x+2$ et $w(x) = x^2+2x+2$.

On a $v'(x) = 2$ et $w'(x) = 2x+2$.

$f'' = \frac{v' \times w - w' \times v}{w^2}$ donc, pour tout réel x , $f''(x) = \frac{2 \times (x^2+2x+2) - (2x+2) \times (2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{2x^2+4x+4-4x^2-8x-4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$.

Un carré est toujours strictement positif, $f''(x)$ est donc du signe de $-2x(x+2)$ qui est une fonction polynôme du second degré avec un coefficient dominant négatif (-2) et qui a pour racines 0 et -2.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On a déduit que f est concave sur $] -\infty ; -2]$ et sur $[0 ; +\infty[$, et elle est convexe sur $[-2 ; 0]$.

Elle n'est donc pas convexe sur $[-3 ; 1]$.

5. Affirmation 5 : vraie

On initialise M avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à M , si un terme est supérieur à M , il va remplacer M .

Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la suite, soit 7 dans notre cas.

Vrai ou faux 3

Affirmation 1 : Fausse. En effet :

Dérivons la fonction f (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme d'une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et d'une fonction composée d'une fonction linéaire suivie de la fonction exponentielle, toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2e^{2x} - 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2f(x) &= (2e^{2x} - 6) - 2(e^{2x} - 6x + 1) \\ &= 2e^{2x} - 6 - 2e^{2x} + 12x - 2 \quad \text{en distribuant le } -2 \\ &= 12x - 8 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f' - 2f$ qui est la fonction $x \mapsto 12x - 8$, qui est différente de la fonction $x \mapsto -6x + 1$, donc f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : Fausse En effet :

En posant la suite (v_n) , suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{3}{4}$, on a

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{Et donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

En utilisant la formule connue pour déterminer la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right).$$

$$\text{Comme on a : } 0 < \frac{3}{4} < 1, \quad \text{on en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0.$$

$$\text{Puis, par limite de la somme, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 4.$$

$$\text{Et, enfin, par limite du produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 4.$$

La limite de la suite est donc finie (et vaut 4).

Affirmation 3 : Fausse. En effet :

La fonction `suite()` part d'une variable `S` qui prend une valeur égale à 0, puis effectue une boucle `for`, qui va ajouter à ce 0 des puissances de $\frac{3}{4}$ (l'instruction `a**b` signifie a^b).

Il y a ici deux problèmes dans cette fonction pour que `suite(50)` renvoie la valeur u_{50} .

- La première erreur, est qu'au lieu d'ajouter des puissances successives de $\frac{3}{4}$, on ajoute toujours la même puissance de $\frac{3}{4}$. L'appel `suite(50)` ajoute $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$ à chaque exécution de la boucle `for`, au lieu d'ajouter $\left(\frac{3}{4}\right)^0$, puis $\left(\frac{3}{4}\right)^1$, puis $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ et ainsi de suite

jusqu'à $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$.

- La seconde erreur est que le nombre u_{50} est la somme des 51 premières puissances de $\frac{3}{4}$ (de la puissance 0 à la puissance 50), et la boucle `for` ici s'exécutera 50 fois seulement, et pas 51 fois.

Pour que l'appel `suite(50)` renvoie u_{50} , il faudrait une fonction comme celle-ci :

```
1 def suite(k):  
2     S=0  
3     for i in range(k+1):  
4         S=S+(3/4)**i  
5     return S
```

La ligne 3 modifiée permet d'exécuter la boucle `for` 51 fois (la variable `i` commencera à la valeur 0, puis augmentera d'unité en unité jusqu'à atteindre la valeur strictement inférieure à `k+1`, donc d'atteindre la valeur `k`).

La ligne 4 modifiée fait qu'à chaque exécution de la boucle `for`, on va ajouter une puissance différente de la raison, avec un exposant de plus en plus élevé.

Remarques : l'instruction `range(k+1)` a exactement le même effet que `range(0, k+1)`.

On peut aussi trouver d'autres fonctions, avec un code différent qui auront le même effet. Il n'est pas nécessaire pour répondre à la question de donner une fonction correcte : pointer l'une des deux erreurs commises suffit à montrer que l'appel `suite(50)` ne produit pas l'effet escompté.

Affirmation 4 : Vraie. En effet :

Quel que soit le réel a , la fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que somme d'une fonction linéaire et du produit de la fonction $\ln$ par un réel, toutes fonctions définies et dérivables sur l'intervalle considéré.

Soit a un réel :

$$\text{On a : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = a \times \frac{1}{x} - 2 = \frac{a}{x} - 2.$$

$$\text{Notamment, pour } x = 1 \quad f'(1) = \frac{a}{1} - 2 = a - 2.$$

La tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = 2$.

Il existe donc une (unique) valeur de a telle que la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Vrai ou faux 4

1. Affirmation 1 : FAUSSE.

La propriété du cours indique que toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ , avec $\ell \geq 0$.

Il suffit donc d'exhiber un contre-exemple.

La suite constante égale à 1 est décroissante (mais pas strictement décroissante) et minorée par 0 (entre autres), et pourtant, elle converge vers 1, et pas vers 0.

Si on préfère donner un contre exemple avec une suite strictement décroissante, on peut par exemple choisir la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ et de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, par exemple. Cette suite est assez clairement décroissante, minorée par 0 et converge vers 1.

2. Affirmation 2 : VRAIE.

En effet, pour n entier naturel :
$$v_n = \frac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{3}{9}\right)^n}{1} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Comme on a : $\frac{9}{7} > 1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{7}\right)^n = +\infty$.

Par ailleurs : $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc, par limite de la somme :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

Finalement, par limite du produit :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{9}{7}\right)^n \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = -\infty.$$

Si on a, pour tout n naturel, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors, par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. Affirmation 3 : VRAIE.

L'appel `terme(4)` commence par initialiser la variable `U` avec la valeur 1 (ligne 2 de la fonction).

Puis, la boucle `for` va s'exécuter N fois, ici donc 4 fois, avec le compteur `i` qui va prendre les valeurs entières entre 0 et $N-1$, donc ici 0, 1, 2 et 3.

- La première exécution « modifie » `U` en `U + 0`, la valeur reste égale à 1 ;
- La deuxième exécution modifie `U` en `U + 1`, la valeur devient égale à $1 + 1 = 2$;
- La troisième exécution modifie `U` en `U + 2`, la valeur devient égale à $2 + 2 = 4$;
- La dernière exécution modifie `U` en `U + 3`, la valeur devient égale à $4 + 3 = 7$.

On a donc bien la valeur 7 renvoyée par cet appel.

4. Affirmation 4 : FAUSSE.

Pour connaître le montant total du prix A, il suffit de multiplier 1000 par 15. Le montant total est donc de 15000 €.

Pour le prix B, il s'agit d'additionner les 15 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 (le montant du prix le premier jours) et de raison 2 (car le montant chaque jour est le double du montant de la veille).

On applique la formule connue :
$$1 \times \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{15}}{-1} = 2^{15} - 1 = 32\,767.$$

Comme $32\,767 > 15\,000$, le prix B est (nettement) plus avantageux.

Remarque : En cas d'oubli de cette formule, on peut aussi (patiemment) calculer la somme des 15 termes, voire même remarquer que la somme reçue au quinzième jour sera de $2^{15-1} = 16\,384$,

donc rien que la somme reçue le quinzième jour du prix B est strictement supérieure aux quinze jours cumulés pour le prix A.

5. Affirmation 5 : VRAIE.

Soit n un entier naturel non nul quelconque :

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, et $\ln(1) = 0$, donc on en déduit que la fonction $\ln$ est à valeurs positives sur $]1 ; +\infty[$ (voire à valeurs strictement positives sur $]1 ; +\infty[$).
- $$v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \ln x \, dx - \int_1^n \ln x \, dx$$

$$= \int_n^{n+1} \ln x \, dx \quad \text{par la relation de Chasles}$$

- l'expression $v_{n+1} - v_n$ est donc l'intégrale, entre deux bornes ordonnées dans l'ordre croissant (car $n < n+1$) d'une fonction à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration (car $[n; n+1] \subset [1; +\infty[$, puisque $n \geq 1$) : cette expression est donc positive.

Pour un n quelconque supérieur à 1, la différence entre les termes v_{n+1} et v_n est positive, donc la suite (v_n) est bien croissante.

Vrai ou faux 5

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f	5		3	1
		$-\infty$	$-\infty$	

- a. **Affirmation 1** : « La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f . »

La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.

Or, d'après le tableau de variations de f , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Affirmation 1 fausse

- b. **Affirmation 2** : « $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = +\infty$. »

D'après le tableau de variations de f , celle-ci est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; -2[$, donc sur cet intervalle $f(x) < 5$ et donc $f(x) - 5 < 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$, on a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 5 = 0^-$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 5} = -\infty \text{ et enfin } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = -\infty.$$

Affirmation 2 fausse

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{-x}$.

- a. **Affirmation 3** : « Le point $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g . »

La fonction g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1 - x), \text{ qui est elle-même dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et}$$

$$g''(x) = -e^{-x} - (1 - x) e^{-x} = e^{-x}(x - 2).$$

On a $g''(x) = 0 \iff e^{-x}(x - 2) \iff x - 2 = 0$, puisque $e^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc la dérivée seconde ne s'annule qu'en $x = 2$.

Comme $g(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$ et comme $g''(x)$ a le signe de $(x - 2)$ et donc change de signe (de moins à plus) en 2, le point $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Affirmation 3 vraie

b. Affirmation 4 : « Pour tout nombre réel x appartenant à $] -\infty ; 2[$, on a $g(x) \leq x$. »

$$g(x) \leq x \iff x e^{-x} \leq x \iff x \leq x e^x \iff 0 \leq x e^x - x \iff x(e^x - 1) \geq 0$$

On établit un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	2
x	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$x(e^x - 1)$	$+$	0	$+$

Donc, pour tout x de $] -\infty ; 2[$, on a $x(e^x - 1) \geq 0$ donc $g(x) \leq x$.

Affirmation 4 vraie

3. Affirmation 5 : « L'équation $x \ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. »

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - 1$.

$$x \ln(x) = 1 \iff x \ln(x) - 1 = 0 \iff f(x) = 0$$

- La fonction f est dérivable et $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 0 = \ln(x) + 1$.
- $f'(x) > 0 \iff \ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) - 1 = -e^{-1} - 1 < 0$

D'où le tableau de variation de f :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	$-e^{-1} - 1$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]0 ; e^{-1}[$, la fonction f est négative, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur l'intervalle $]e^{-1} ; +\infty[$, la fonction f , continue et strictement croissante, passe du négatif au positif : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Affirmation 5 fausse