

SUITES	
Terminale Spé maths	Divers

Exercice 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

1. a. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

b. Pour tout n , $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.

On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n , $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n , $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.

La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n , $v_n \geq v_0$ donc $v_n \geq 1$.

c. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geq n + 1$.

On démontre cette propriété par récurrence.

- Initialisation

Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n + 1 = 1$ donc $u_n \geq n + 1$; $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\mathcal{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geq n + 1$.

$u_{n+1} = u_n + v_n$; or $u_n \geq n + 1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geq 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geq n + 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.

d. Pour tout n , $u_n \geq n + 1$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \frac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

a. $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1 , soit 1 selon la parité de n ; donc $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$.

On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.

On divise par u_n^2 et on obtient : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.

b. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{u_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.

On sait de plus que, pour tout n : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

c. $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2$.

On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$

d. Pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n \left(2 + \frac{v_n}{u_n}\right)}{u_n \left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4} .

Exercice 2

1) L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est égal à $3\,000 + 80$, c'est-à-dire 3 080.

Entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, il y a une baisse de 5 % ; or $3\,080 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 2\,926$.

Par conséquent, $u_1 = 2\,926$.

2) En généralisant, on obtient : $u_{n+1} = (u_n + 80) \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,95u_n + 76$, pour tout entier naturel n .

3) On a entré, dans la cellule C2, la formule : **= 0.95*B2+76**

4) a)) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbf{N}$, $u_n > 1\,520$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = 3\,000$ et que $3\,000 > 1\,520$, alors on a bien $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n > 1\,520$.

Alors $0,95 \times u_n > 0,95 \times 1\,520$ car $0,95 > 0$, c'est-à-dire $0,95 \times u_n > 1\,444$.

D'où $0,95 \times u_n + 76 > 1\,444 + 76$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1\,520$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n , soit : $u_n > 1\,520$** .

b) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76 = -0,05(u_n - 1\,520)$.

Or pour tout entier naturel n , $u_n > 1520$, par suite, $u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit que **la suite (u_n) est décroissante**.

c) Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 520, alors **(u_n) est convergente**.

5) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444 = 0,95(u_n - 1520) = 0,95v_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme

$$v_0 = 3\,000 - 1520 = \mathbf{1480}.$$

b) D'après la question précédente, on en déduit que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = 1480 \times 0,95^n. \text{ Or } u_n = v_n + 1520; \text{ par conséquent, } \mathbf{\text{pour tout entier naturel } n,}$$

$$\mathbf{u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520}.$$

c) Comme $-1 < 0,95 < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$; d'où **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1520$** (par produit et somme de limites).

6)

$$n \leftarrow 0$$

$$u \leftarrow 3\,000$$

Tant que **$u > 2\,000$**

$$n \leftarrow \mathbf{n + 1}$$

$$u \leftarrow \mathbf{0,95u + 76}$$

Fin du tant que

7) Le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Or on a vu que la limite de la suite est 1 520, donc **la réserve marine fermera un jour**.

En utilisant la calculatrice, on trouve $n = 22$; donc **l'année de la fermeture sera en 2039**.

1) L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est égal à $3\,000 + 80$, c'est-à-dire 3 080.

Entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, il y a une baisse de 5 %; or $3\,080 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 2\,926$.

Par conséquent, **$u_1 = 2\,926$** .

2) En généralisant, on obtient : **$u_{n+1} = (u_n + 80) \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,95u_n + 76$, pour tout entier naturel n** .

3) On a entré, dans la cellule C2, la formule : **$= 0.95*B2+76$**

4) a)) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbf{N}$, $u_n > 1\,520$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = 3\,000$ et que $3\,000 > 1\,520$, alors on a bien $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n > 1\,520$.

Alors $0,95 \times u_n > 0,95 \times 1\,520$ car $0,95 > 0$, c'est-à-dire $0,95 \times u_n > 1\,444$.

D'où $0,95 \times u_n + 76 > 1\,444 + 76$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1\,520$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n , soit : $u_n > 1\,520$** .

b) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76 = -0,05(u_n - 1\,520)$.

Or pour tout entier naturel n , $u_n > 1520$, par suite, $u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit que **la suite (u_n) est décroissante**.

c) Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 520, alors **(u_n) est convergente**.

5) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444 = 0,95(u_n - 1520) = 0,95v_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme

$$v_0 = 3\,000 - 1\,520 = \mathbf{1\,480}.$$

b) D'après la question précédente, on en déduit que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = 1\,480 \times 0,95^n. \text{ Or } u_n = v_n + 1\,520; \text{ par conséquent, } \mathbf{\text{pour tout entier naturel } n,}$$

$$\mathbf{u_n = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520}.$$

c) Comme $-1 < 0,95 < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$; d'où **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\,520$** (par produit et somme de limites).

6)

$$n \leftarrow 0$$

$$u \leftarrow 3\,000$$

Tant que **$u > 2\,000$**

$$n \leftarrow n + 1$$

$$u \leftarrow \mathbf{0,95u + 76}$$

Fin du tant que

7) Le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Or on a vu que la limite de la suite est 1 520, donc **la réserve marine fermera un jour**.

En utilisant la calculatrice, on trouve $n = 22$; donc **l'année de la fermeture sera en 2039**.

Exercice 3

Partie A : un premier modèle

1) Augmenter une quantité de 5 % revient à la multiplier par 1,05.

Alors, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,05v_n$. **La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $v_0 = 12$** .

Donc, **pour tout entier naturel n , $v_n = 12 \times (1,05)^n$** .

2) Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, c'est-à-dire qu'il faut chercher n tel que $v_n > 60$.

$$v_n > 60 \Leftrightarrow 12 \times (1,05)^n > 60 \Leftrightarrow (1,05)^n > 5$$

D'après la calculatrice, $n = 33$. Par suite, la population dépassera 60 000 individus en 2049.

Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que fonction polynôme.

$$\text{Pour tout réel } x, \quad g'(x) = -\frac{2,2}{605}x + 1,1 = 1,1 \left(1 - \frac{2}{605}x\right).$$

Comme 1,1 est strictement positif, le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1 - \frac{2}{605}x$.

Or $1 - \frac{2}{605}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{605}{2} = 302,5$. Par suite, $g'(x) > 0$ pour tout x inférieur à 302,5.

Par conséquent, **g est croissante sur $[0; 60]$** .

$$b) \quad g(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0$$

$$\text{Donc } x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,1 \times 605}{1,1} = \frac{605}{11} = 55.$$

L'équation $g(x) = x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: 0 et 55.

$$2) a) \quad u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938.$$

Avec ce second modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 55$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = 12$, alors on a bien $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $0 \leq u_n \leq 55$.

Comme la fonction g est croissante sur $[0; 60]$, alors $g(0) \leq g(u_n) \leq g(55)$.

Or $g(0) = 0$, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(55) = 55$, alors $0 \leq u_{n+1} \leq 55$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n , soit : $0 \leq u_n \leq 55$** .

$$c) \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = \frac{1,1}{605}u_n \left(-u_n + \frac{0,1}{\frac{1,1}{605}}\right) = \frac{1,1}{605}u_n(-u_n + 55).$$

Comme $0 \leq u_n \leq 55$, alors $\frac{1,1}{605}u_n \geq 0$ et $-u_n + 55 \geq 0$; on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n . **La suite (u_n) est donc croissante.**

d) D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est croissante et majorée par 55.

Par conséquent, **la suite (u_n) est converge vers un réel ℓ** .

e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. D'après la question 1) b) de la partie B, ℓ prend la valeur 0 ou la valeur 55.

Or la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$, alors $u_n \geq 12$ pour tout entier naturel n .

Par conséquent, **$\ell = 55$** .

Selon ce second modèle, la population va tendre vers 55000 individus.

3)

$n \leftarrow 0$

$u \leftarrow 12$

Tant que **$u < 50$**

$$u \leftarrow -\frac{1,1}{605}u^2 + 1,1u$$

$$n \leftarrow n + 1$$

Fin du tant que