SUITES	
Terminale Spé maths	***Divers***

Exercice 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, **on admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1.

a. Calculez u_1 et v_1.

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geq 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a: $u_n \geq n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}.$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite $({r_n}^2)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil():
    n=0
    r=1
    while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
        r=(2+r)/(1+r)
        n=n+1
    return n
```

(`abs` désigne la valeur absolue, `sqrt` la racine carrée et `10**(-4)`représente 10^{-4})

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

Exercice 2

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

• entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
• entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, un désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$.
On a donc $u_0 = 3000$.

1) Justifier que $u_1 = 2926$.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

3) À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule **C2** afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1520$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5) On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

6) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

7) La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice 3

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5% par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$. On a donc $v_0 = 12$.

1) Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2) Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1u_n$.

1) On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x) = -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x$.
   a) Justifier que g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$.
   b) Résoudre dans **R** l'équation $g(x) = x$.
2) On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.
   c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3) Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant :

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 12$
Tant que ....
      $u \leftarrow$ ....
      $n \leftarrow$ ....
Fin du tant que

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.