

CORRECTIONS

Terminale Spé maths

Q.C.M.

Q.C.M. 1

1. On considère la fonction g définie est dérivable sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x^2 + x + 1).$$

La fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$x^2 + x + 1$ est une fonction positive sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions positives.

On pose $u(x) = x^2 + x + 1$ et on a $u'(x) = 2x + 1$.

La fonction dérivée de $\ln(u(x))$ est la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ soit la réponse c : $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0; +\infty[$ la fonction :

Pour déterminer si $f(x) = \ln(x)$ admet pour primitive l'une des fonctions citées, il suffit de les dériver.

Soit $g(x) = x \ln(x) - x$.

La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$.

La fonction g est donc une primitive de f soit la réponse c.

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)}{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right)} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} - 1 = -1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} + 1 = 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1} = -1$.

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$, donc finalement par produit de limites la limite de la suite (a_n) est égale à $-\infty$.

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2]$ est donné par :

La fonction f est :

a. convexe sur $[-2; -1]$

b. concave sur $[0; 1]$

c. convexe sur $[-1; 2]$

d. concave sur $[-2; 0]$

Les variations de la dérivée donnent la convexité de la fonction, si f' est décroissante alors la fonction est concave.

Comme f' est décroissante sur $[-2; 0]$, f est donc concave sur cet intervalle soit la réponse d

5.

Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction f .

En 1, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en 1.

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

Pour que la fonction seuil fonctionne, il faut que la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ et que le nombre de mois soit augmenté de 1 à chaque exécution de la boucle soit la réponse a.

Q.C.M. 2

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

- a. n'admet aucune solution. b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions. d. admet une infinité de solutions.

On a : $f(x) = 2022 \iff \ln(1 + x^2) = 2022 \iff e^{\ln(1+x^2)} = e^{2022} \iff 1 + x^2 = e^{2022} \iff$
 $x^2 = e^{2022} - 1$: ce nombre étant positif, l'équation a deux solutions : $\sqrt{e^{2022} - 1}$ et $-\sqrt{e^{2022} - 1}$
Réponse c.

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x \ln(x) - x^2$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- a. La fonction g est convexe sur $]0; +\infty[$. b. La fonction g est concave sur $]0; +\infty[$.
c. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0; +\infty[$. d. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0; +\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle, $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

Puis $f''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

On a donc $f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} - 2 = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$.

Sur $]0; +\infty[$, f a un seul point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$. Réponse c.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $] -1; 1[$ par :

- a. $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$ b. $g(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$
c. $g(x) = \frac{x^2}{2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right)}$ d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1 - x^2)$

Soit la fonction g définie sur $] -1; 1[$ par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$.

En posant $u(x) = 1 - x^2$, dérivable et non nulle sur $] -1; 1[$, on a $g'(x) = -2x$ et on sait que $g(x) = -\frac{1}{2} \ln u(x)$ entraîne $g'(x) = -\frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} = f(x)$. Réponse a.

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

- a. $] -3; 2[$ b. $] -\infty; 6[$
c. $]0; +\infty[$ d. $]2; +\infty[$

- b. $F'(x) = -\frac{1}{4} \left(4x^3 \times e^{-x^2} + x^4 \times -2xe^{-x^2} \right) = -\frac{1}{4} e^{-x^2} (4x^3 - 2x^5)$
- c. $F'(x) = -\frac{1}{2} \left(2x \times e^{-x^2} + (x^2 + 1) \times -2xe^{-x^2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (2x - 2x^3 - 2x) = x^3 e^{-x^2}$
- d. $F'(x) = (6x - 8x^3) \times e^{-x^2} + (3x^2 - 2x^4) \times -2xe^{-x^2} = (4x^5 - 14x^3 + 6x) e^{-x^2}$

Réponse c

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Réponse b

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives notées F . De plus $f(x)$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$, on peut alors écrire que pour tout réel x , $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Sachant que $F(0) = 1$ alors

$$\frac{1}{2} e^1 + k = 1 \iff k = 1 - \frac{1}{2} e. \text{ Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2} e.$$

Réponse c

6. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f est concave sur $[-2; 1]$, convexe sur $[1; 4]$ et $f''(1) = 0$ (point d'inflexion). f'' est donc négative sur $[-2; 1]$, positive sur $[1; 4]$ s'annulant en 1.

Réponse a

Q.C.M. 4

1. $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 1 \frac{1}{2} \ln(3) - \ln(3) = -\frac{1}{2} \ln(3)$

Réponse d

2. Donnons en premier le domaine de définition. Il faut que $x > 0$ et $x > 10$. Donc $\mathcal{D}_f =]10; +\infty[$.

$$\ln(x) + \ln(x - 10) = \ln(3) + \ln(7) \iff \ln(x(x - 10)) = \ln(31) \iff x(x - 10) = 21$$

$$\iff x^2 - 10x - 21 = 0. \text{ Ce trinôme admet deux solutions : } \Delta = 184 \text{ et } \sqrt{\Delta} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}.$$

$$\text{Les deux solutions sont : } x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{46}}{2} = 5 - \sqrt{46} \text{ et } x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{46}}{2} = 5 + \sqrt{46}.$$

Réponse c

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. Elle est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x \times (-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x \ln(x) + x = -x + 2x \ln(x) = x(2 \ln(x) - 1).$$

$$f'(x) = 0 \iff x(2 \ln(x) - 1) = 0 \iff 2 \ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \text{ La tangente au point d'abscisse } a = \sqrt{e} \text{ est horizontale. Son équation est donnée par : } y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Sachant que $f'(\sqrt{e}) = 0$ et que $f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e$. L'équation de cette tangente horizontale est donc : $y = -\frac{1}{2}e$.

Réponse d

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 5 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaunes tirés, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et

$$p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} : X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Ainsi } p(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{5-2} = 0,3456 \approx 0,346.$$

Réponse b

5. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$: $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right)$.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

Réponse d

6. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$: $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right)$.

L'espérance d'une loi binomiale est égale à : $E(X) = np$.

$$\text{Ici, } E(x) = 5 \times \frac{2}{5} = 2.$$

Réponse c