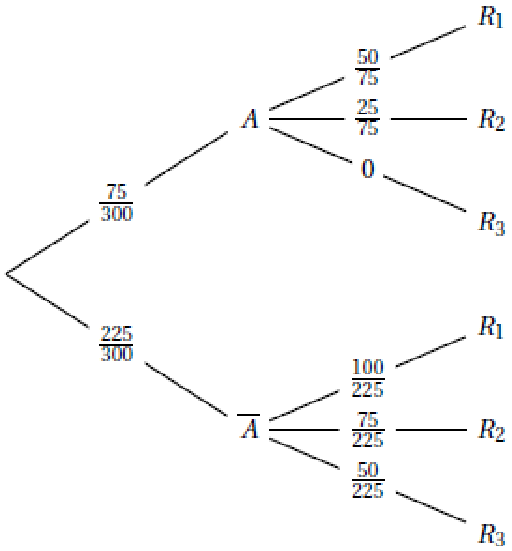
| PROBABILITES | |
|---|---|
| ***Terminale Spé maths*** | ***Divers*** |

## Exercice 1

1) On modélise la situation par un arbre pondéré.




**2. a.** La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :
$P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$.

**b.** La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $P(R_2)$..
D'après la formule des probabilités totales :
$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P\left(\overline{A} \cap R_2\right) = \dfrac{25}{300} + \dfrac{125}{300} \times \dfrac{75}{125} = \dfrac{25}{300} + \dfrac{75}{300} = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$.

**c.** La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. La probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est :
$P_{R_2}(A) = \dfrac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

**3.** On note $X$ la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement $R_1$.

**a.** La loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $P(R_1)$ | $P(R_2)$ | $P(R_3)$ |

- $P(R_1) = P(A \cap R_1) + P\left(\overline{A} \cap R_1\right) = \dfrac{75}{300} \times \dfrac{50}{75} + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{100}{225} = \dfrac{50}{300} + \dfrac{100}{300} = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$
- $P(R_2) = \dfrac{1}{3}$
- $P(R_3) = P(A \cap R_3) + P\left(\overline{A} \cap R_3\right) = 0 + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{50}{225} = \dfrac{50}{300} = \dfrac{1}{6}$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

**b.** L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X) = \sum (x_i \times p_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$.
Cela veut dire que le nombre de passages pour réussir l'examen est en moyenne de 1,67.

**4.** On choisit, successivement et de façon indépendante, $n$ personnes parmi les 300 du groupe étudié, où $n$ est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de $n$ personnes parmi les 300 personnes du groupe.
On admet que la probabilité de l'évènement $R_3$ est égale à $\frac{1}{6}$.

**a.** On cherche un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
$P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P\left(\overline{R_3}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Le nombre $\frac{5}{6}$ est donc la probabilité de l'événement « $R_1$ ou $R_2$ », c'est-à-dire la probabilité qu'une personne prise au hasard réussisse l'examen à la première tentative ou à la deuxième.

La probabilité que $n$ personnes réussissent l'examen à la première ou à la deuxième tentative est de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
L'événement de probabilité $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ est l'événement contraire du précédent, donc correspond à l'événement « au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative », c'est-à-dire « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où $p$ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

**b.** La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de $n$ pour laquelle $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$.
On résout cette inéquation :

$$1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^n > 0{,}9 \iff 0{,}1 > \left(\tfrac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0{,}1) > \ln\left(\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right) \iff \ln(0{,}1) > n\ln\left(\tfrac{5}{6}\right) \iff \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} < n$$

$\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12{,}6$ donc la commande **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.
Il faut donc prendre $n = 13$ personnes sur les 300 pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à 0,9.

## Exercice 2

### Partie 1

**1.** La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

**a.** 0 **b.** 1 **c.** 0,24 $\boxed{\textbf{d.}\ 0{,}76}$

On cherche $P(X = 0)$ qui vaut $\dbinom{9}{0} \times 0{,}03^0 \times 0{,}97^9 \approx 0{,}76$.

**Réponse d.**

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

b. $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

c. $\boxed{\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2}$

d. $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

> On cherche $P(X=2)$ qui vaut $\binom{9}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^7$.
>
> **Réponse c.**

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X<1)$

b. $P(X \leqslant 1)$

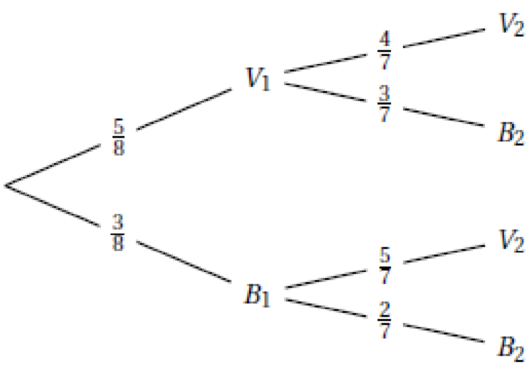
c. $P(X \geqslant 2)$

**b.** $\boxed{1 - P(X=0)}$

> On cherche $P(X \geqslant 1)$ qui vaut $1 - P(X=0)$.
> **Réponse d.**

## Partie 2

On construit un arbre de probabilités résumant la situation :




4. La probabilité de $V_2$ sachant que $V_1$ est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

a. $\frac{5}{8}$

**b.** $\boxed{\frac{4}{7}}$

c. $\frac{5}{14}$

d. $\frac{20}{56}$

> D'après l'arbre, $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$.
> **Réponse b.**

5. La probabilité de l'évènement $V_2$ est égale à :

**a.** $\boxed{\frac{5}{8}}$

b. $\frac{5}{7}$

c. $\frac{3}{28}$

d. $\frac{9}{7}$

> D'après la formule des probabilités totales :
> $P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$
> **Réponse a.**