

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Terminale Spé maths

Divers

Exercice 1

Les sommets du cube ont pour coordonnées : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. a. • Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\vec{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{BI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- c. • Les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
 • $\vec{DJ} \cdot \vec{BI} = -1 + 0 + 1 = 0$ donc $\vec{DJ} \perp \vec{BI}$.
 • $\vec{DJ} \cdot \vec{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\vec{DJ} \perp \vec{BG}$.

Donc le vecteur $\vec{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

- d. • Le vecteur $\vec{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.

- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan ; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2 - 0 + 0 + d = 0$, ce qui veut dire que $d = -2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

- a. La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\vec{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\vec{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d .

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $\vec{FM}$ et $\vec{DJ}$ soient colinéaires.

$$\vec{FM} \text{ et } \vec{DJ} \text{ colinéaires} \iff \vec{FM} = t \cdot \vec{DJ} \iff \begin{cases} x-1 = t \times 2 \\ y-0 = t \times (-1) \\ z-1 = t \times 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc la droite } d \text{ a pour équation } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- b. On considère le point L de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6})$.

- Pour prouver que $L \in d$, on cherche t pour que $\begin{cases} \frac{2}{3} = 1 + 2t \\ \frac{1}{6} = -t \\ \frac{5}{6} = 1 + t \end{cases}$

On trouve $t = -\frac{1}{6}$ donc $L \in d$.

- Le plan (BGI) a pour équation $2x - y + z - 2 = 0$; or $2x_L - y_L + z_L - 2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = 0$, donc $L \in (\text{BGI})$.

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. a. La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF

- $IF = \frac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\frac{FG \times FB}{2} = \frac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

- b. La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d , donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$$FL^2 = \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ donc } FL = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times FL \times \mathcal{A} \iff \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \mathcal{A} \iff \frac{3 \times \sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

L'aire du triangle BGI est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 2

1. On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

- a. Pour $t = 0$, on a : $\begin{cases} x(0) = 140 \\ y(0) = 105 \\ z(0) = -170 \end{cases}$ donc les coordonnées du sous-marin au début de l'observation sont $A(140; 105; -170)$.

- b. Le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) (x'(t) = -60; y'(t) = -90; z'(t) = -30)$, donc la vitesse est $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = \sqrt{12600} = 30\sqrt{14} \approx 112,25 \text{ m.min}^{-1}$.

- c. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Appelons B le point atteint par le sous-marin au bout d'une minute : $B(80; 15; -200)$.

D'après la définition de la vitesse, celle-ci $30\sqrt{14}$ est égale à la distance AB.

Soit C le point tel que $\overrightarrow{AB}$ soit dans un plan perpendiculaire au plan horizontal; C a donc la même abscisse et la même ordonnée que B, mais la cote de A : $C(80; 15; -170)$.

On a donc dans le triangle rectangle ABC : $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{30\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

La calculatrice donne au dixième près : $\alpha \approx 15,5$ degrés.

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68; 135; -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202; -405; -248)$ avec une vitesse constante.

Les coordonnées de S_2 sont $\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) + at \\ y_2(t) = y_2(0) + bt \\ z_2(t) = z_2(0) + ct \end{cases}$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées (constantes) du vecteur vitesse.

Au bout de trois minutes, on a :
$$\begin{cases} x_2(3) = x_2(0) + 3a = 68 + 3a = -202 \\ y_2(3) = y_2(0) + 3b = 135 + 3b = -405 \\ z_2(3) = z_2(0) + 3c = -68 + 3c = -248 \end{cases}$$

On en déduit :
$$\begin{cases} a = -90 \\ b = -180 \\ c = -60 \end{cases} \quad \text{donc } S_2(t) = \begin{cases} x_2(t) = 68 - 90t \\ y_2(t) = 135 - 180t \\ z_2(t) = -68 - 60t \end{cases}$$

Les deux sous-marins ont à la même profondeur si $z_1(t) = z_2(t)$ donc si $-170 - 30t = -68 - 60t \Leftrightarrow 30t = 102 \Leftrightarrow \boxed{t = 3,4 \text{ min}}$

Exercice 3

Partie A : un calcul de volume sans repère

1) On sait que O est le centre du carré ABCD donc OA = OC.

Comme la pyramide SABCD est équilatère à base carrée donc SA = SC.

On se place dans le triangle SAC.

SA = SC donc le triangle SAC est isocèle en S.

OA = OC donc O est le milieu de [AC] et donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SAC.

Comme le triangle SAC est isocèle de sommet principal S, la médiane issue de S est aussi une médiatrice ; on en déduit que (SO) est perpendiculaire à (AC).

En se plaçant dans le triangle SBD, on démontre de même que (SO) est perpendiculaire à (BD).

La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABC) donc **la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC)**.

2) Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

• La base de la pyramide est le carré ABCD dont les diagonales mesurent 24 cm.

Dans le triangle ABC isocèle rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire $576 = 2AB^2$, ce qui équivaut à $AB^2 = 288$.

L'aire du carré ABCD est donc égale à $AB^2 = 288 \text{ cm}^2$.

• D'après l'énoncé, SO = OA donc $SO = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$.

• Le volume de la pyramide est donc égal à $V = \frac{288 \times 12}{3} = \mathbf{1152 \text{ cm}^3}$.

Partie B : dans un repère

Dans le repère $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$, les points O, A, B et S ont pour coordonnées respectives

$(0 ; 0 ; 0)$, $(1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; 1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; 1)$.

Comme O est le milieu de [AC] et de [BD], on peut dire que les points C et D ont pour coordonnées respectives $(-1 ; 0 ; 0)$ et $(0 ; -1 ; 0)$.

1) Comme P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS], alors P et Q ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{3}{2} ; 0 ; -\frac{1}{2}\right)$ et

$\left(-1 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Comme les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, alors $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (PQC).

De plus, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \times 0 + (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QC} = 1 \times (-1) + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. D'où $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$.

Par conséquent, $\vec{n}(1; 1; -3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).

b) D'après la question précédente, le plan (PQC) a pour équation $x + y - 3z + d = 0$.

Or C appartient à ce plan, d'où : $-1 + 0 - 3 \times 0 + d = 0$, ce qui équivaut à $d = 1$.

Donc le plan (PQC) a pour équation $x + y - 3z + 1 = 0$.

2) a) Comme la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC), alors elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (PQC).

Donc, une représentation paramétrique de la droite (SH) est
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) H est le point du plan (PQC) et de la droite (SH).

Réolvons le système
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \\ t + t - 3 + 9t + 1 = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \\ t = \frac{2}{11} \end{cases}.$$

Par conséquent, H a pour coordonnées $\left(\frac{2}{11}; \frac{2}{11}; \frac{5}{11}\right)$.

c) $SH = \sqrt{\left(\frac{2}{11} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{11} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{11} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{121} + \frac{4}{121} + \frac{36}{121}} = \sqrt{\frac{44}{121}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}.$

3) La pyramide SPQCD a pour base le quadrilatère PQCD et pour hauteur SH; son volume

est donc égal à
$$\frac{\text{aire}(PQCD) \times SH}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{11}}{8} \times \frac{2\sqrt{11}}{11}}{3} = \frac{3 \times 2 \times 11}{3 \times 8 \times 11} = \frac{1}{4}.$$

Donc le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unités de volume.

Partie C : un partage équitable

La longueur OA est égale à une unité de longueur et à 12 cm. Donc l'unité de longueur vaut 12 cm et l'unité de volume vaut $12^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$.

Le volume de la pyramide SABCD est égal à 1 152 cm^3 .

Le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unité de volume, soit $0,25 \times 1\,728 = 432 \text{ cm}^3$.

Or $\frac{1\,152}{2} = 576$ et $576 \neq 432$ donc le partage

proposé par Fanny n'est pas équitable.



