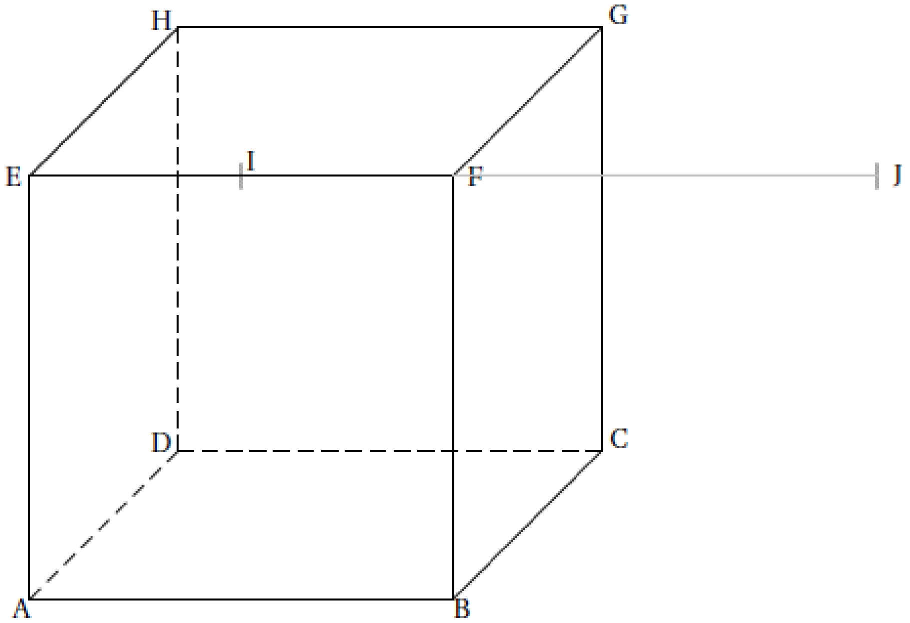
GEOMETRIE DANS L'ESPACE	
Terminale Spé maths	***Divers***

Exercice 1

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

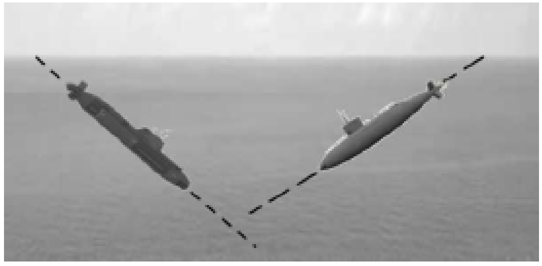
1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
4. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
5. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.
   b. En déduire l'aire du triangle BGI.

<u>**Exercice 2**</u>

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée. On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.



Le plan défini par $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x(t) & = & 140-60t \\ y(t) & = & 105-90t \\ z(t) & = & -170-30t \end{array}\right.$$

a. Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.

b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?

c. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

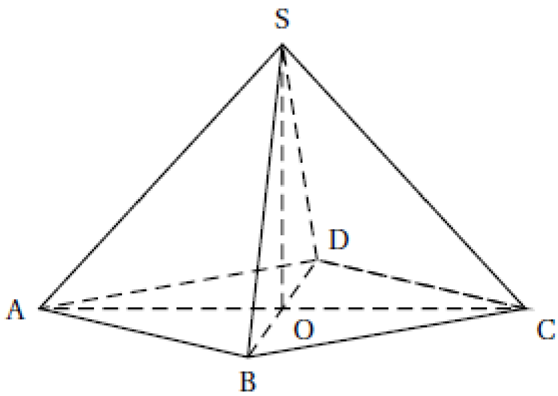
<u>**Exercice 3**</u>

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.

On admettra que OS = OA.



1) Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2) En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère

On considère le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

1) On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

a) Justifier que $\vec{n}(1\,;\,1\,;-3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).

2) Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

b) Calculer les coordonnées du point H.

c) Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

3) On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$.

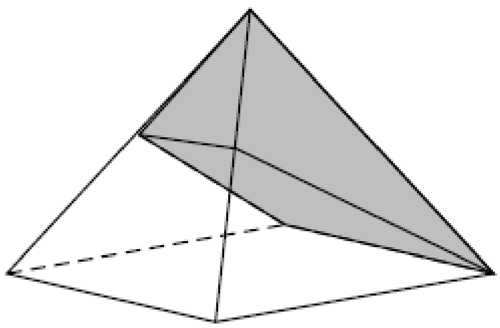
Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : un partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.