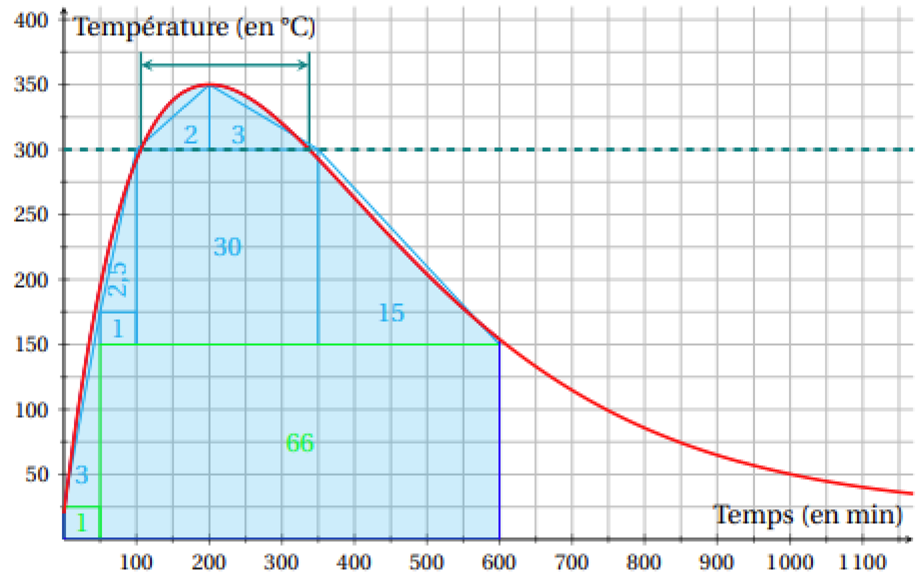
CALCUL INTÉGRAL	
Terminale Spé maths	*Divers*

Exercice 1

Partie 1 : appareil de la marque A



1. Le point le plus haut de la courbe est à (200 ; 350), c'est donc au bout de 200 minutes (soit 3 h 20 min) que la température maximale (de 350 °C) est atteinte.
2. (voir les tracés en vert pour la justification).

   On mesure environ 2 cm de large sur lesquels la courbe est au dessus de la droite d'équation $y = 300$, donc, avec 1 000 minutes représentées par 9,5 cm, on en déduit que la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C est d'environ : $\dfrac{2,2 \times 1000}{9,5} \approx 232$ minutes.

   (Ici, la précision de la lecture pouvait donner des résultats assez variables, une différence d'un millimètre dans la lecture donnant environ 11 minutes d'écart).
3. Si f est la fonction représentée sur le graphique, manifestement à valeurs positives sur l'intervalle [0 ; 600], alors $\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la mesure de la surface de la zone colorée sur le graphique, délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant f, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 600$, exprimée en unités d'aires.

   On peut donc compter les carreaux colorés, ce sera une estimation, bien sûr, en délimitant des zones, pour ne pas compter individuellement les carreaux. Avec le découpage proposé en bleu, on compte 123,5 carreaux colorés, et donc, un carreau représentant une largeur de 50 unités pour une hauteur de 25 unités, chaque carreau correspond à 1 250 unités d'aire.

   Une estimation de l'intégrale est donc de : $1\,250 \times 123,5 = 154\,375$ unités d'aire.

   On a donc : $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \dfrac{1}{600} \times 154375 \approx 257,3.$

   Le quotient de l'intégrale de 0 à 600 de la fonction par 600 (qui est l'amplitude de l'intervalle de 0 à 600) fait que la valeur demandée est exactement la définition de la *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 600].

On peut donc interpréter notre estimation en disant que, au cours des 10 premières heures (de 0 à 600 minutes, donc), la température moyenne de l'intérieur du foyer est donc de 257 °C, environ.

Partie 2 : étude d'une fonction

1. Pour tout t réel strictement positif, on a :

$g(t) = 10 \times (-100) \times (-0{,}01t)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 20 = -1000 \times (-0{,}01t)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 20$

Comme $-0{,}01 < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}01t = -\infty$.

Par composition (en posant $y = -0{,}01t$) : $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}01t\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} = \lim\limits_{y \to -\infty} y\mathrm{e}^{y} = 0$.

La limite $\lim\limits_{y \to -\infty} y\mathrm{e}^{y} = 0$ est connue par la propriété des croissances comparées.

Finalement, par limite du produit et de la somme, on a :

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = -1\,000 \times 0 + 20 = 20.$

2. **a.** Pour tout t réel positif, on pose : $u(t) = 10t$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}01t}$,

donc on a, pout t réel positif : $u'(t) = 10$ et $v'(t) = -0{,}01 \times \mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

$g = u \times v + 20$, donc $g' = u'v + v'u + 0$

On a donc, pour t réel positif : $g'(t) = 10 \times \mathrm{e}^{-0{,}01t} + \left(-0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right) \times 10t$

$$= \left(10 - 0{,}01 \times 10t\right)\mathrm{e}^{-0{,}01t}$$

$$= \left(-0{,}1t + 10\right)\mathrm{e}^{-0{,}01t}.$$

b. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que, pour tout réel t positif, on a : $\mathrm{e}^{-0{,}01t} > 0$ et donc $g'(x)$ a le signe de $(-0{,}1t + 10)$.

$$-0{,}1t + 10 > 0 \iff -0{,}1t > -10$$
$$\iff t < 100, \quad \text{car } -0{,}1 < 0$$

La fonction g est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0;100]$, puis strictement décroissante sur $[100\,;\,+\infty[$.

On calcule $g(0) = 10 \times 0 \times \mathrm{e}^{0} + 20 = 20$ et $g(100) = 10 \times 100 \times \mathrm{e}^{-1} + 20 = 1000\mathrm{e}^{-1} + 20$ (avec $g(100) \approx 388$).

On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	0		100		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	20	$\nearrow$	$1000\mathrm{e}^{-1} + 20$	$\searrow$	20

3.

- Sur $[0\,;\,100]$, la fonction g est continue (car dérivable), strictement croissante et 300 est une valeur intermédiaire entre $g(0) = 20$ et $g(100) \approx 388$, donc en appliquant le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit que 300 admet un unique antécédent par g dans l'intervalle $[0;100]$ (et cet antécédent n'est pas 100, dont l'image n'est pas 300).
- De même, sur $[100;+\infty[$, g reste continue, est cette fois strictement décroissante, et 300 est une valeur strictement intermédiaire entre $g(100) \approx 388$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 20$, donc d'après le même corollaire, 300 admet un unique antécédent par g sur $[100\,;\,+\infty[$.

Ainsi, l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$: une strictement inférieure à 100, l'autre strictement supérieure à 100.

Avec la calculatrice, on a des valeurs approchées qui sont : 43 et 193.

4.
$$\begin{aligned}\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{600} \left(10t\,\mathrm{e}^{-0,01t}+20\right)\mathrm{d}t\\
&= 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{600} 20\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t + 20\times 600\\
&= 12000 + 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ensuite, on pose, pour tout réel positif t : $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,01t}$.

On a alors : $u'(t) = 1$ et, par exemple, $v(t) = -100\,\mathrm{e}^{-0,01t}$.

Avec ces fonctions u et v ainsi introduites, on a :

$$\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{600} u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la propriété d'intégration par parties, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t &= \Big[u(t)\times v(t)\Big]_0^{600} - \int_0^{600} u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big[t\times(-100)\,\mathrm{e}^{-0,01t}\Big]_0^{600} - \int_0^{600} 1\times(-100)\times\mathrm{e}^{-0,01t}\,\mathrm{d}t\\
&= -100\Big[t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\Big]_0^{600} + 100\int_0^{600}\mathrm{e}^{-0,01t}\,\mathrm{d}t\\
&= -100\left(600\,\mathrm{e}^{-6} - 0\,\mathrm{e}^{0}\right) + 100\Big[-100\,\mathrm{e}^{-0,01t}\Big]_0^{600}\\
&= -60000\,\mathrm{e}^{-6} - 10000\left(\mathrm{e}^{-6} - \mathrm{e}^{0}\right)\\
&= -60000\,\mathrm{e}^{-6} - 10000\left(\mathrm{e}^{-6} - 1\right)\\
&= 10000 - 70000\,\mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant le calcul de départ, et en y intégrant ce dernier résultat :

$$\begin{aligned}\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t &= 12000 + 10\int_0^{600}\left(t\,\mathrm{e}^{-0,01t}\right)\mathrm{d}t\\
&= 12000 + 10\left(10000 - 70000\,\mathrm{e}^{-6}\right)\\
&= 112000 - 700000\,\mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

(On a une valeur approchée pour cette intégrale de 110 265, à l'unité près.)

Partie 3 : évaluation

Reprenons les résultats de la partie A (pour l'appareil A) et de la partie B (pour l'appareil B) afin de voir quels critères sont satisfaits :

— Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.

Validé pour les deux appareils (on a une température maximale d'environ 350 ° C pour l'appareil A, environ 388 ° C pour l'appareil B).

— Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.

Validé pour l'appareil B, qui atteint sa température maximale pour $t = 100$ minutes après l'allumage, soit 1 h 40 min après l'allumage. L'appareil A, lui, n'atteint sa température maximale qu'au bout de 200 minutes, soit 3 h 20 min.

— Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 ° C.

Validé pour l'appareil A, on a une température moyenne sur les 10 premières heures d'environ 250 ° C.

Pour l'appareil B, déterminons la température moyenne :

$\mu = \dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{112\,000 - 700\,000\,\mathrm{e}^{-6}}{600} \approx 184$. L'appareil B ne valide pas ce critère, sa température moyenne pour les dix premières heures après l'allumage n'est que d'environ 184 °C.

— Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300°C pendant plus de 5 heures.

Ce critère est validé pour l'appareil A, on avait trouvé une durée totale au dessus de 300 ° C d'environ 233 minutes, soit 3 h 53.

Pour l'appareil B, entre les variations de la fonction g et les antécédants de 300 approchés, on a une durée au-dessus de 300° C de $193 - 43 = 150$ minutes, soit 2 h 30 min : le critère est vérifié également.

Les deux appareils obtiennent bien exactement trois étoiles : tous les critères sauf le n° 2 sont validés par l'appareil A, et pour l'appareil B, ce sont tous les critères, sauf le n° 3.

Exercice 2

1. **a.** On sait que sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\ln x \leqslant 0$ et comme $x^2 \geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x \geqslant 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2 + x \leqslant -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g.

b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x \longmapsto x^2\ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 =$
$-\dfrac{1}{9} - \left(\dfrac{1}{3\alpha^3}\ln\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{9\alpha^3}\right) = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha - \dfrac{1}{3}\right)$,
soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,
$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3}\left(-4 + 2\alpha - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} =$
$\dfrac{-\alpha^3 + 12 - 6\alpha + 1}{9\alpha^3} = \dfrac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$.

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)\mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(x^2 \ln x\right) \mathrm{d}x,$$

soit d'après le calcul précédent :

$$\mathscr{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07.$$

Exercice 3

1. **a.** Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$, et si $x \in [-1\,;\,1]$, on a $1 - x^2 \geqslant 0$.

Donc pour tout x de $[-1\,;\,1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = 1 - x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

Par intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Donc $I = \left[(1-x^2)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(-2x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm³, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathscr{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm², de la surface colorée (**Figure 2**).

On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \left[\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = \left[1\mathrm{e}^1 - (-1)\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}\right]\\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Donc $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{-1}$.

$\mathscr{V} = 3 \times S = 12\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathscr{V} \approx 4{,}4$ cm³.