

CALCUL INTÉGRAL

Terminale Spé maths

Divers

Exercice 1

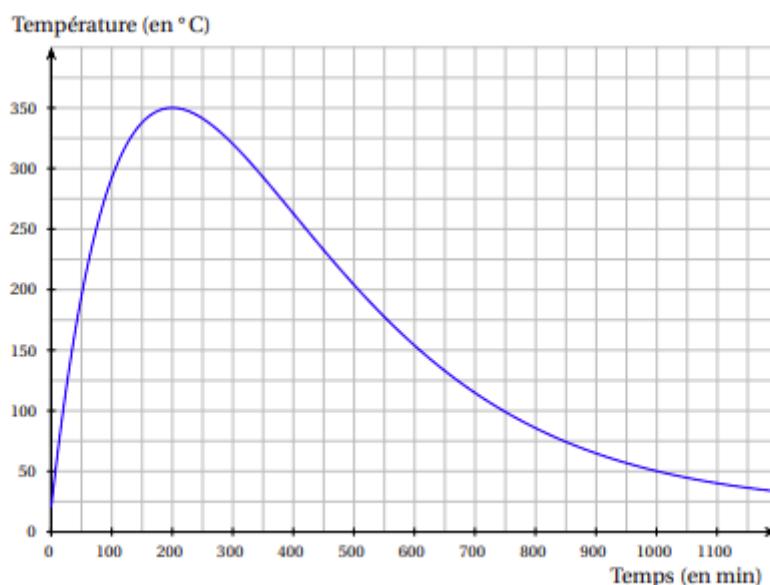
Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.
3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

Estimer la valeur de $\frac{1}{600} \int_0^{600} f(t) dt$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = 10t e^{-0,01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2.
 - a. Montrer que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $g'(t) = (-0,1t + 10) e^{-0,01t}$.
 - b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ et construire son tableau de variations.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{600} g(t) dt$.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0 ; 600]$ par la fonction g .

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 °C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles? Justifier votre réponse.

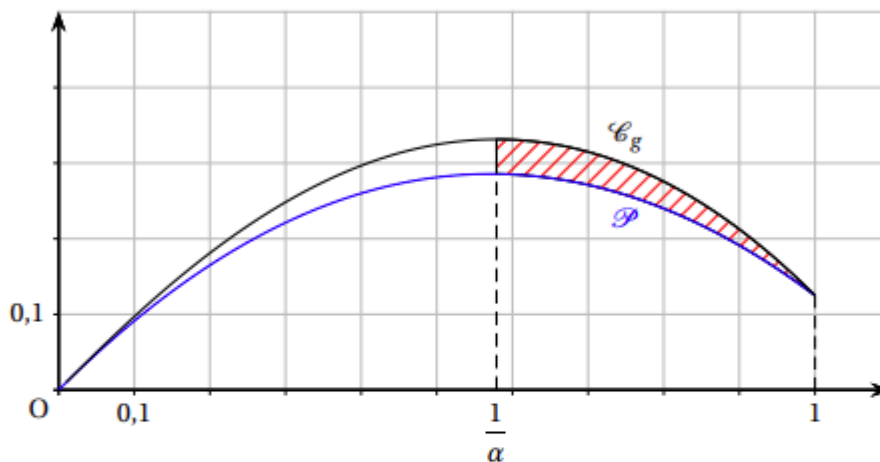
Exercice 2

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1. a. Justifier la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
- b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

Exercice 3

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

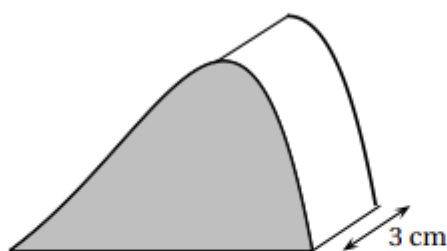


Figure 1

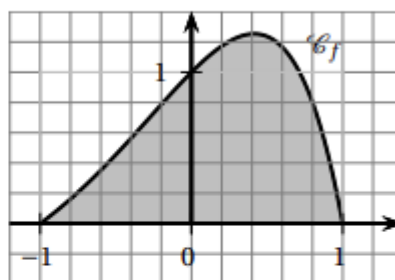


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geq 0$.
b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à $0,1 \text{ cm}^3$ près, est égal à $4,4 \text{ cm}^3$.

Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ sont donc les fonctions f définies par :
 $f(x) = e^{-\frac{1}{4}x}(20x + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

4. On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K) e^0 = 8 \iff K = 8$, donc :

$$f(x) = (20x + 8) e^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x + 2) e^{-\frac{1}{4}x}.$$