

ANALYSE	
Terminale Spé maths	Divers

Exercice 1

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0 , l'autre entre 0 et 1 .

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, $x^2 + x^3$ est du signe de $1+x$.
 - $x^2 + x^3 = 0$ pour $x \in \{-1; 0\}$.
 - $x^2 + x^3 > 0$ pour $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.
 - $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]-\infty; -1[$.
 - x solution de (E) $\iff e^x = 3(x^2 + x^3) \iff x^2 + x^3 = \frac{e^x}{3}$. Or, pour tout réel x , $\frac{e^x}{3} > 0$, alors que $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]-\infty; -1[$. (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $] -\infty; -1[$.
 - $e^0 = 1$ et $3 \times (0^2 + 0^3) = 0$. Donc 0 n'est pas solution de (E).
- $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, (E) $\iff e^x = 3(x^2 + x^3)$
 $\iff \ln e^x = \ln(3(x^2 + x^3))$ $a = b \iff \ln a = \ln b$
 $\iff x = \ln 3 + \ln(x^2(1+x))$ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
 $\iff x = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x)$
 $\iff \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x = 0$
 $\iff h(x) = 0$
- h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien dérivable sur $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$.
Si $u > 0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\frac{u'}{u}$.
Pour tout réel $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, $h'(x) = 0 + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)}$. On a bien : $h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$.
 - Pour étudier le sens de variations de h , on étudie le signe de sa dérivée.
Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.
Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1 , le coefficient dominant est $1 > 0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).
Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant.
On trouve : $\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Le coefficient dominant est $-1 > 0$, d'où le signe...

x	-1	$1 - \sqrt{3}$	0	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 2$	-	0	+	0	-
$x(x+1)$	0	-	0	+	
$h'(x)$	+	0	-	+	0 -

Étude des limites aux bornes :

- Limite en -1

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} \ln 3 - x = \ln 3 - 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow -1} \ln X = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow -1} \ln x^2 = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} 1 + x = 0 \\ \lim_{X \rightarrow -1} \ln X = -\infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$$

- Limite en 0

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln 3 - x = \ln 3 \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^2 = -\infty \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 3 - x = -\infty \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2 = +\infty \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \Rightarrow \end{array}$$

on a la F.I. « $+\infty - \infty$ »

$$h(x) = \ln 3 + (x+1) \left(\frac{2 \ln x}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right).$$

Or

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$
- $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$
- Pour tout $x > 1$, $0 \leq \frac{\ln x}{x+1} < \frac{\ln x}{x}$. Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et le théo-

rème des gendarmes assure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$

Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty.$$

Pour avoir le tableau de variations complet, il nous faut encore les signes de $h(1 - \sqrt{3}) < 0$ et $h(1 + \sqrt{3}) > 0$ que l'on obtient avec la calculatrice.

x	-1	$1-\sqrt{3}$		0	α_1	$1+\sqrt{3}$		α_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-	
h		$h(1-\sqrt{3})$				$h(1+\sqrt{3})$			
		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$	

- c. • Sur l'intervalle $]-1; 0[$, la dérivée s'annule en changeant de signe (+ ; -), donc $h(1 - \sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1 - \sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1; 0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.
- Sur l'intervalle $]0; 1 + \sqrt{3}[$ la fonction h est dérivable, donc continue; 0 est compris entre $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et $h(1 + \sqrt{3})$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc au moins une solution sur $]0; 1 + \sqrt{3}[$. Comme h est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution α_1 est unique.
- La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$.
0 est donc compris entre $h(0,61)$ et $h(0,62)$, le raisonnement précédent assure donc que $\alpha_1 \in]0,61; 0,62]$.
On trouve de même que $0,618 < \alpha_1 < 0,619$
Une valeur approchée de α_1 , arrondie au centième est donc 0,62.
- Comme $h(1 + \sqrt{3}) > 0$, 0 est aussi compris entre $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $h(1 + \sqrt{3})$. Le même raisonnement assure donc l'existence d'une autre solution dans cet intervalle. Voir le tableau.
- Avec la calculatrice, on trouve 7,12 comme valeur approchée de α_2 , arrondie au centième.
- d. La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus!

Exercice 2

- Le point A a pour abscisse 0; $f(0) = 1$ donc $\mathcal{C}$ passe par le point A (0; 1).
 - Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{-1 - 0} = -2$.
 - D'après la formule $(e^u)' = u' e^u$ et la dérivée d'une somme et d'un produit :

$$f'(x) = 1 + 0 + a e^{-x^2} + ax(-2x) e^{-x^2} = 1 - a(2x^2 - 1) e^{-x^2}$$
 - On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A; cela veut dire que le coefficient directeur de (AB) est égal au nombre dérivé de la fonction f en x_A soit $f'(0)$.
On a donc $f'(0) = -2 \iff 1 - a(0 - 1) e^0 = -2 \iff 1 + a = -2 \iff a = -3$
- D'après la question précédente, pour tout réel x , $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
 - $$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} > 0 \\ \forall x \in]-1; 0], -3x \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \forall x \in]-1; 0], -3xe^{-x^2} \geq 0 \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \forall x \in]-1; 0], x + 1 - 3xe^{-x^2} > 0 \end{array}$$

$$\forall x \in]-1; 0], x + 1 > 0$$

Donc, pour tout x de $]-1; 0]$, $f(x) > 0$.
 - Si $x \leq -1$, alors $x^2 \geq 1$ donc $2x^2 \geq 2$, donc $2x^2 - 1 \geq 1$ et donc $3(2x^2 - 1) \geq 3$.
Comme pour tout x , $e^{-x^2} > 0$, on peut dire que pour tout $x \leq -1$, $3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$ (par produit).
Donc, pour tout $x \leq -1$, $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$.

- c. Sur $] -\infty; -1]$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle donc sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$.

Or $f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0,026 < 0$ et $f(-1) \approx 1,10 > 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$; on l'appelle c .

Or $f\left(-\frac{3}{2} + 2.10^{-2}\right) \approx 0,017 > 0$ donc $c \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}\right]$ et donc $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c \leq x \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

- a. Comme $f(x) \geq 0$ sur $[c; 0]$, alors $\mathcal{A} = \int_c^0 f(x) dx$.

- b. On admet que l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x) dx$ est une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près.

Pour calculer la valeur exacte de I , il faut déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

La fonction $x \mapsto x + 1$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$.

La fonction $x \mapsto -2xe^{-x^2}$ (forme $u'e^u$) a pour primitive la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ donc la fonction $x \mapsto -3xe^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}e^{-x^2}$.

La fonction f a donc pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}e^{-x^2}$.

D'après le cours : $I = F(0) - F\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}\right) = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}$

Exercice 3

PARTIE I

- La droite $\mathcal{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.
La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
On peut donc déduire que $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.
 - La droite $\mathcal{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1; 2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\frac{3-0}{0-3} = -1$.
On a donc $f'(1) = -1$.
- La droite $\mathcal{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x + 3$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$.

1. • $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = e(2 - \ln(e)) = e(2 - 1) = e$ donc $A \in \mathcal{C}_f$.
- $f(1) = \frac{2 + \ln(1)}{1} = 2$ donc $B \in \mathcal{C}_f$.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0; +\infty[$ cette équation.
- $$f(x) = 0 \iff \frac{2 + \ln(x)}{x} = 0 \iff 2 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$$
- Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $(e^{-2}; 0)$.

2. Calculs des limites.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + \ln(x)) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + \ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3. Pour $x \in]0; \infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 2 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$.
4. $f'(x)$ est du signe de $-1 - \ln(x)$; $-1 - \ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < e^{-1}$
- On dresse le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	e	0

5. On admet que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$.

La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.

Sur $]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3} \geq 0 \iff 1 + 2\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \iff x \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty \right[$.