

ANALYSE

Terminale Spé maths

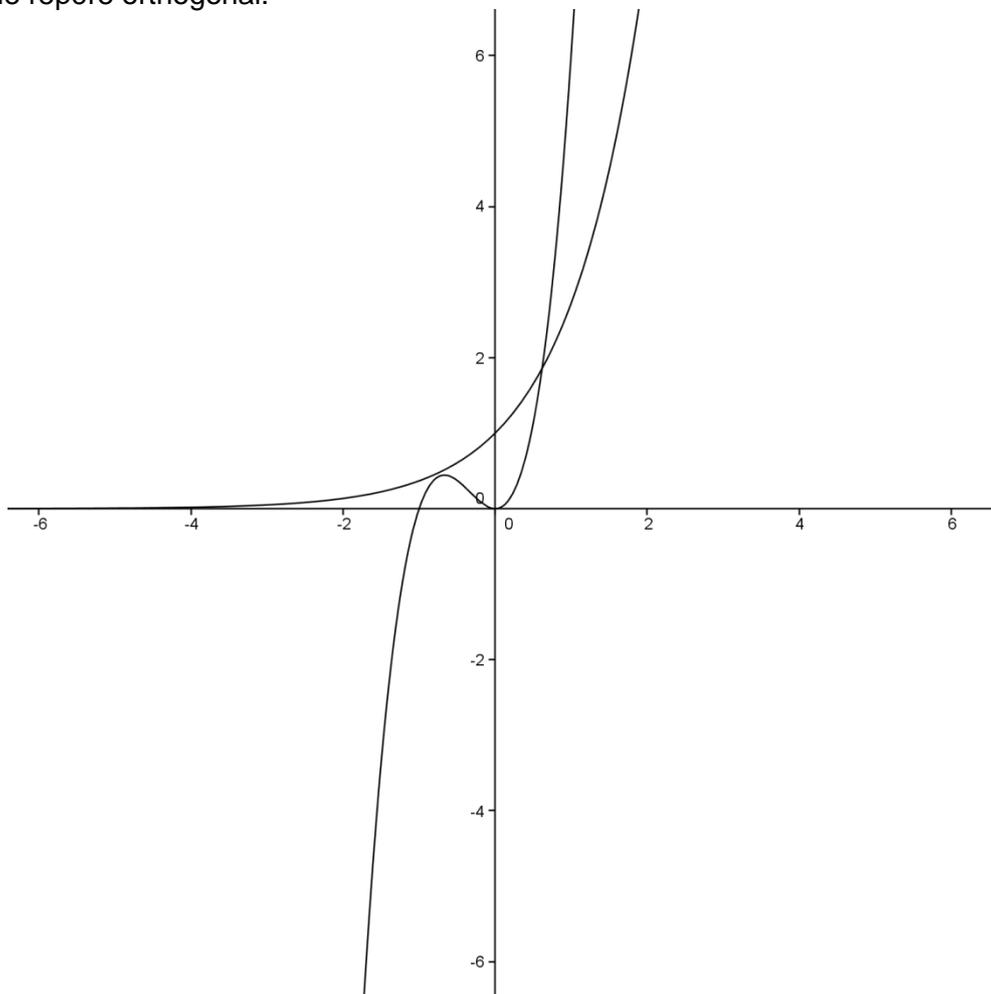
Divers

Exercice 1

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

- a. Étudier selon les valeurs de x , le signe de $x^2 + x^3$.
b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.
c. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).
2. On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel x de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

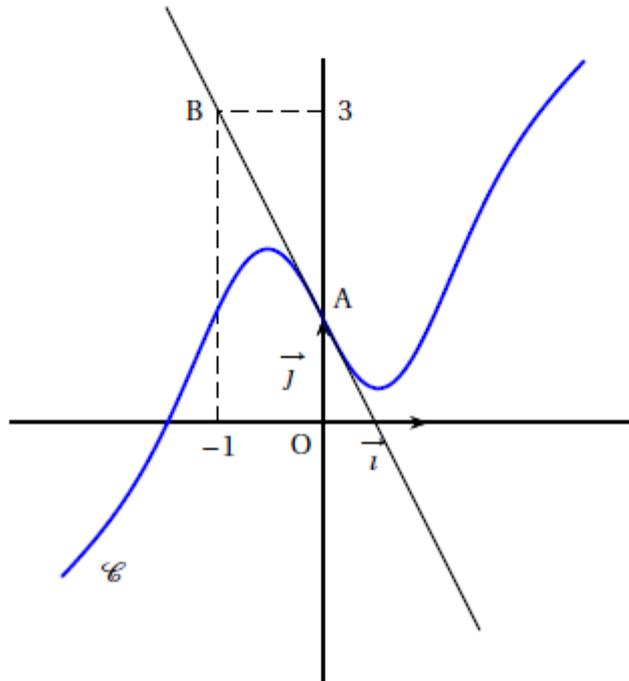
b. Déterminer les variations de la fonction h .

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

4. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice 2

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , une courbe \mathcal{C} et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0; 1)$ et $(-1; 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur \mathbb{R} dont la courbe représentative est \mathcal{C} .

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1. a. Justifier que la courbe \mathcal{C} passe par le point A.
- b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

c. Démontrer que pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe \mathcal{C} au point A.
Déterminer la valeur du réel a .

2. D'après la question précédente, pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; 0]$, $f(x) > 0$.

b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f'(x) > 0$.

c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

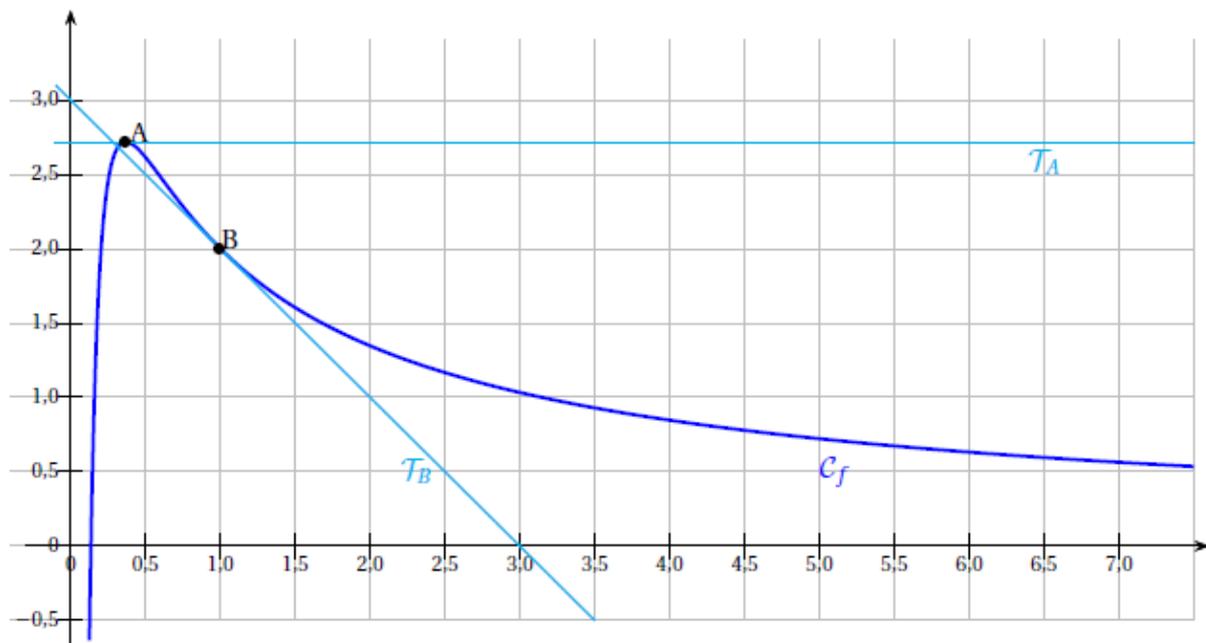
Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2 \cdot 10^{-2}$.

Exercice 3

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$;
- la tangente \mathcal{T}_A à la courbe \mathcal{C}_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$;
- la tangente \mathcal{T}_B à la courbe \mathcal{C}_f au point B de coordonnées $(1; 2)$.

La droite \mathcal{T}_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite \mathcal{T}_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f .

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite \mathcal{T}_B .

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe \mathcal{C}_f passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0; \infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f . On admet que, pour tout $x \in]0; +\infty[$

$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.