

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Terminale Spé maths

Divers

Exercice 1

1. Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0) .

On a donc $f' = f$ soit $0 = k$.

L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.

2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme

$$f(x) = Ce^x \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

3. Pour tout réel x on a : $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.

$$\text{D'autre part : } h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$$

d'où pour tout réel x , $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, h est solution de l'équation différentielle (E) .

4. Supposons que f soit une solution de (E) .

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} (f-h)'(x) &= f'(x) - h'(x) \implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - (h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)) \\ &\text{car } f \text{ et } h \text{ sont solutions de } (E) \\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x) \\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - h(x) = (f-h)(x) \end{aligned}$$

Donc $f-h$ est solution de (E_0)

Réciproquement : supposons que $f-h$ soit solution de (E_0)

$$\text{On a donc } (f-h)'(x) = f(x) - h(x) \text{ soit } f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$$

D'où : $f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ car h est solution de (E)

Donc : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ c'est à dire f est solution de (E) .

Conclusion : f est solution de (E) si et seulement si $f-h$ est solution de (E_0) .

5. On a donc $f(x) - h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions

$$f(x) = Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

6. g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que

$$g(x) = Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x).$$

$$\text{De plus } g(0) = 0 \text{ donc } g(0) = Ce^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0.$$

$$\text{D'où } C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \iff C = -2$$

$$\text{On a donc : } g(x) = -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x).$$

$$7. \text{ Calculons : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \, dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)) \, dx = \left[-2e^x - \cos(x) + 2\sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = -2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-2e^0 - \cos(0) + 2\sin(0))$$

$$I = -2e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 5$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2 &= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \frac{36}{(1+5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{6}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{6(1+5e^{-x}) - 6}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2} = f'(x) \end{aligned}$$

Donc f est bien une solution de l'équation (E).

2.
 - Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto K e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$;
 - La fonction constante $x \mapsto \frac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre;
 - Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto \frac{1}{6} + K e^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

$$3. \quad \text{a. On a donc : } h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

$$\text{Or si } h(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{ alors } h'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

L'équation précédente devient :

$$-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6} \text{ soit en multipliant par } [g(x)]^2$$

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}[g(x)]^2 \text{ ce qui signifie que la fonction } g \text{ est une solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

b.

$$g_m(x) = \frac{6}{1+6me^{-x}}.$$

Puisque m est positif, alors $6me^{-x}$ l'est aussi et $1+me^{-x} \geq 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel x . La fonction h_m définie par $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Or $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1+6me^{-x}}{6} = \frac{1}{6} + me^{-x}$ et on reconnaît une solution de l'équation différentielle de la question 2..

On a ensuite vu à la question 3. a. que si la fonction h_m était une solution de $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g_m était elle solution de l'équation $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$,

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire u définie par $u(x) = -\frac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle

$$u'(x) = -\frac{1}{4}.$$

La fonction composée $g(u(x)) = axe^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle, $g'(u) = ae^{u(x)} + axu' \times e^{u(x)} = ae^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4}\right)$.

$$\text{Or } g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4}\right) + \frac{1}{4} \times axe^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4} + \frac{ax}{4}\right) = ae^{-\frac{1}{4}x}.$$

Donc g est solution de l'équation différentielle sur $[0; +\infty[$, si sur cet intervalle :

$$ae^{-\frac{1}{4}x} = 20e^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20, \text{ car quel que soit } x \text{ réel, } e^{-\frac{1}{4}x} \neq 0.$$

La fonction $g : x \mapsto 20xe^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{4}y = 0$,

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

L'équation (E') peut s'écrire $y' = -\frac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation (E') sont les fonctions f définies par :

$$f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions f de l'équation (E) sont telles que pour $x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \text{ ou d'après la question 1. :}$$

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = g'(x) + \frac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \frac{1}{4}[f(x) - g(x)] \text{ soit par linéarité de la dérivation :}$$

$$(f - g)'(x) + \frac{1}{4}(f - g)(x) = 0 : \text{ ceci signifie que la fonction } f - g \text{ est solution de (E') c'est-à-dire que}$$

$$f(x) - g(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} + g(x) \text{ ou enfin } f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} + 20xe^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = (20x + K)e^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont donc les fonctions f définies par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{4}x}(20x + K), \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

4. On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K)e^0 = 8 \iff K = 8$, donc :

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x + 2)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

Exercice 4

1. **Affirmation 4** : Vraie. Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

Soit g la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K$, avec $K \in \mathbb{R}$; alors $g'(x) = 0$.

g est donc solution de l'équation différentielle si

$$g'(x) = \frac{3}{2}g(x) + 2 \iff 0 = \frac{3}{2} \times K + 2 \iff \frac{3}{2}K = -2 \iff K = -\frac{4}{3}.$$

2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.

3. **Affirmation 5** : Vraie La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.

Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E), alors :

$f'(x) = \frac{3}{2}f(x) + 2$. Or on a vu que $g'(x) = \frac{3}{2}g(x) + 2$, d'où par différence membre à membre de ces deux égalités :

$$f'(x) - g'(x) = \frac{3}{2}f(x) - \frac{3}{2}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \frac{3}{2}(f(x) - g(x)) \iff$$

$((f - g)'(x) = \frac{3}{2}(f(x) - g(x)))$ par linéarité de la dérivation : ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de l'équation $y' = \frac{3}{2}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{\frac{3}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

On a donc $f(x) - g(x) = f(x) - \left(-\frac{4}{3}\right) = Ke^{\frac{3}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Finalement les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ke^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$.

En particulier la fonction f_1 telle que $f_1(0) = 0$ vérifie $Ke^0 - \frac{4}{3} \iff K = \frac{4}{3}$, donc

$$f_1(x) = \frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}.$$

Puisque f_1 est une solution de (E), on a $f_1'(1) = \frac{3}{2}f_1(1) + 2 = \frac{3}{2} \left[\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2} \times 1} - \frac{4}{3} \right] + 2 =$

$2e^{\frac{3}{2}} - 2 + 2 = 2e^{\frac{3}{2}}$. Le nombre dérivé en 1 est égal à la pente de la tangente à la courbe représentative de f_1 au point d'abscisse 1.