ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Terminale Spé maths	Divers

Exercice 1

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\,\mathrm{e}^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2}.$$

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.
3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

   On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

   On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

   a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

   b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}.$$

   Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

   $$(E') : \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5** : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.