THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES ET CONVEXITE	
Cours	***Terminale Spé maths***

Objectifs :

• Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
• Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
• Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
• Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction

1. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Activité

Posons le problème suivant :

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f, a et b sont deux réels du domaine de définition de f (on suppose que $a < b$).

« quel que soit le réel k choisi entre $f(a)$ et $f(b)$,
existe-t-il un réel x de $[a\ ;\ b]$ tel que $f(x) = k$? »

ou, graphiquement,

« quel que soit le réel k choisi entre $f(a)$ et $f(b)$,
la droite d d'équation $y = k$ coupe-t-elle $\mathscr{C}_f$ sur $[a\ ;\ b]$? »

1. Quelques exemples

Figure 1 : $f(x) = x^2$, $a = 1$ et $b = 3$

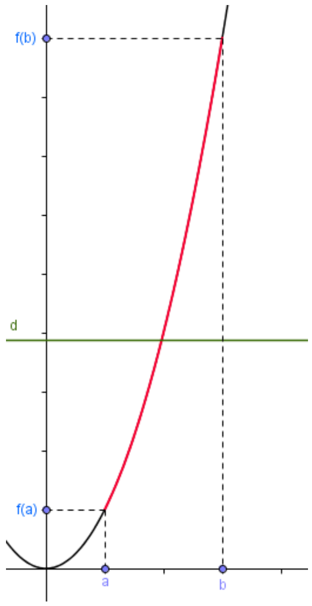
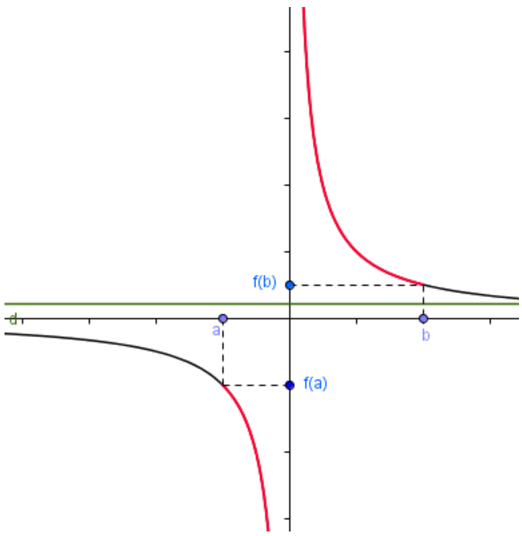


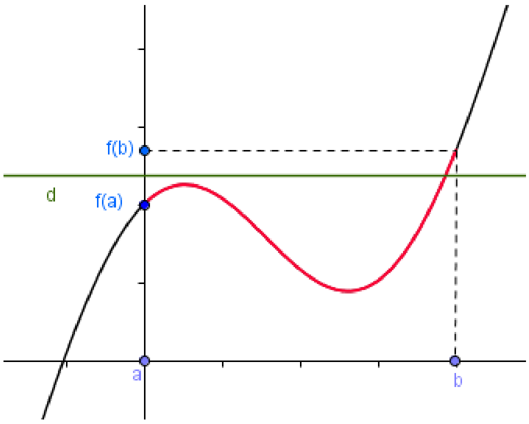
Figure 2 : $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = -1$ et $b = 2$



C. Lainé

Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d coupe $\mathscr{C}_f$ ....

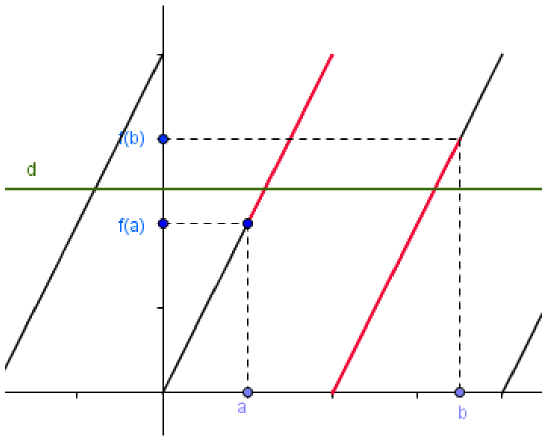
Figure 3 : $f(x)=2\cos(x)+x$, $a=0$ et $b=4$



Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d coupe $\mathscr{C}_f$ ....

Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d .... $\mathscr{C}_f$.

Figure 4 : $f(x)=2(x-E(x))$, $a=0{,}5$ et $b=1{,}75$



Quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d coupe $\mathscr{C}_f$ ....

2. Conjecture

Une condition suffisante pour que d coupe dans tous les cas au moins une fois $\mathscr{C}_f$ semble

être que ....

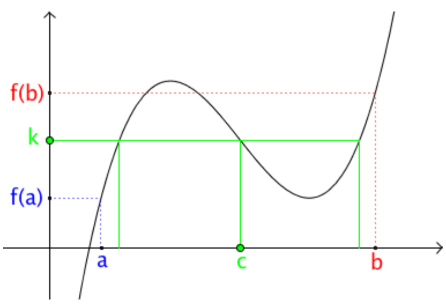
Cette condition n'est pas .... comme le montre la figure 4.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1. *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et, a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ...

...



Ce théorème signifie que si les hypothèses sont réalisées alors pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ d'inconnue x admet au moins une solution entre a et b.

• Ce théorème traduit de façon rigoureuse la propriété suivante :

Propriété 1.

« A et B sont deux points d'abscisses a et b de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. Si on peut tracer $\mathscr{C}_f$ entre A et B sans lever le crayon, alors toute droite d'équation $y = k$ où k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en au moins un point. »

• La continuité de f est une condition suffisante pour assurer l'existence de c, elle n'est pas nécessaire.

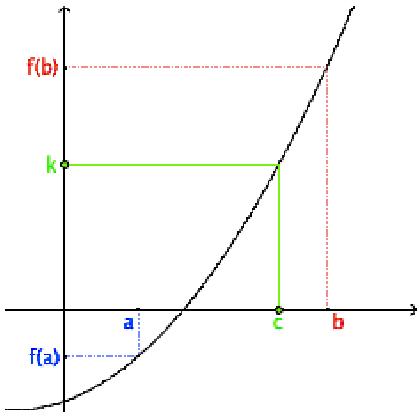
2) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2. *Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*

Soit f une fonction définie, continue et .... sur $[a\ ;\ b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ...

...



Exercice ❶

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Démontrer que $f'(x) = 3x(x-2)$.

2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

5) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

correction en vidéo

Méthode pour déterminer un encadrement de la solution d'une équation

méthode en vidéo

Exercice ❷

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+6$.

Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution sur $[-1\,;\,4]$.

Exercice ❸

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)e^x-e$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g. Justifier.

2) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

Déterminer un arrondi de α à 10^{-1} près.

2. Convexité d'une fonction

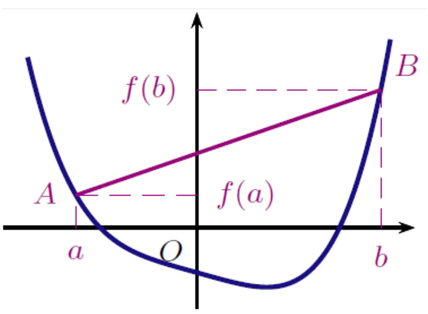
1) Fonction convexe et fonction concave

Définition 1. ***Convexité d'une fonction***

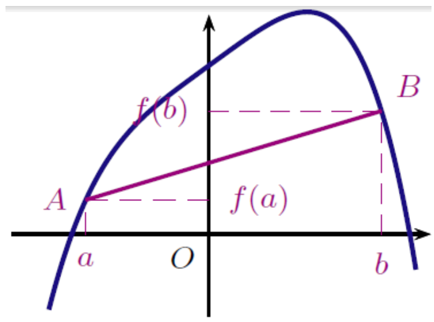
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- f est convexe sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est …………………….. de la sécante (AB).

- f est convexe sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est …………………….. de la sécante (AB).



CONVEXE



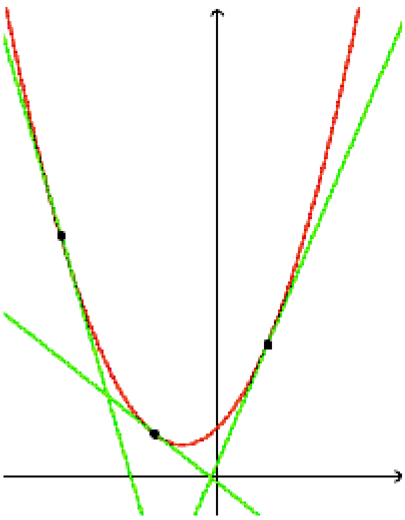
CONCAVE

Définition 2. ***Convexité d'une fonction en utilisant les tangentes***

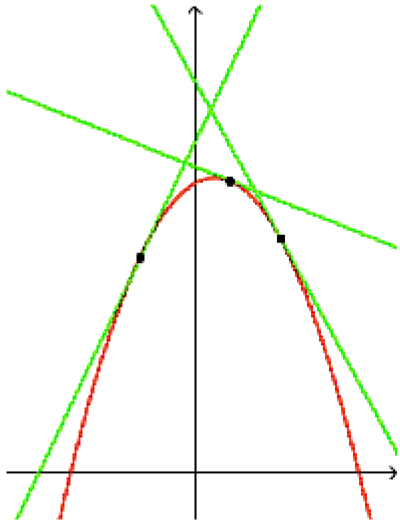
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement ………………. de chacune de ses ………………..

- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement ………………. de chacune de ses ………………..



CONVEXE



CONCAVE

Propriété 2. ***Convexité des fonctions de référence***

- La fonction carré est ………………. sur $\mathbb{R}$.

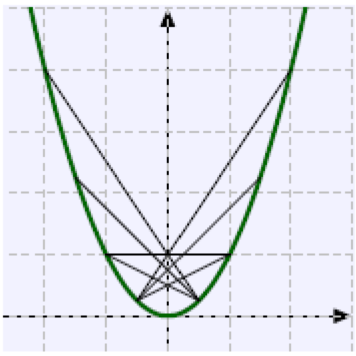
- La fonction cube est ………………. sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et ………………. sur $[0\ ;+\infty[$.

- La fonction inverse est ………………. sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et ………………. sur $]0\ ;+\infty[$.

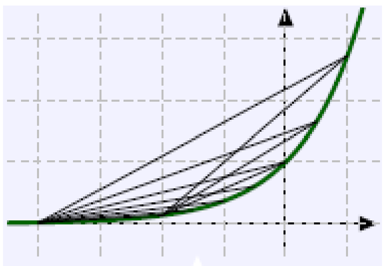
- La fonction racine carrée est ………………. sur $[0\ ;+\infty[$.

- La fonction exponentielle est ………………. sur $\mathbb{R}$.

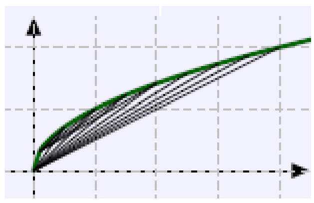
- La fonction logarithme népérien est ………………. sur $]0\ ;+\infty[$.



fonction carrée



fonction exp



fonction racine carrée

2) Convexité et dérivée

Théorème 3. ***Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est ………………. sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est ………………. sur I.

Remarque : On appelle dérivée seconde d'une fonction la dérivée de sa dérivée, on la note f''. On peut traduire le théorème précédent avec le signe de la dérivée seconde.

Propriété 3. ***Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée seconde***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est .... sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est .... sur I.

Démontrons que f est convexe, si f' est croissante : On considère la fonction g dérivable sur I et définie par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.
Alors, pour tout réel x de I, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante sur I.
De plus, $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On en déduit le tableau de variations de g :

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Par suite, on peut dire que la fonction g est positive sur I, soit $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

démonstration en vidéo

Exercice ❹
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Etudier la convexité de f.

correction en vidéo

Exercice ❺
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice ❻
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Etudier la convexité de g.

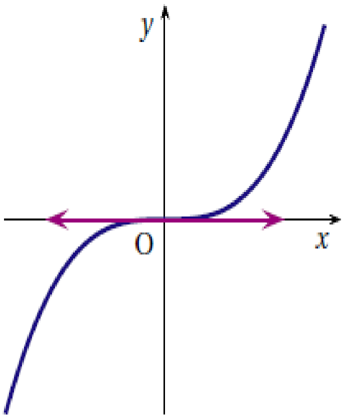
3) Point d'inflexion

Définition 3. ***Point d'inflexion***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe …………………… sa tangente en ce point, alors on dit que A est un …………………………………

Exemple :



Soit f la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.
- Pour $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
- Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0\ ;+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc ……………
………………… est un point d'inflexion de la fonction cube.

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriété 4. ***Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée seconde***

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction …………………… de convexité.

- Si la dérivée f' …………………………………………… en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

- Si la dérivée seconde f'' ……………………………………………………… en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

Exercice ❼
Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de x milliers de clés USB est défini par $C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$.

1) Démontrer que la courbe représentant la fonction C admet un point d'inflexion
2) Interpréter ce résultat au regard du contexte de l'exercice.

démonstration en vidéo

Exercice ❽

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.

1) Étudier la convexité de la fonction *f*.

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

3) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.