SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES

Objectifs :
- *Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.*
- *Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.*
- *Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.*

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs a_1, a_2, ..., a_n et Y prend les valeurs b_1, b_2, ..., b_n.

Définitions 1.

• La variable aléatoire $X+Y$ prend toutes les valeurs possibles a_i+b_j avec $1\leq a_i\leq n$ et $1\leq b_j\leq n$.

• Loi de probabilité de $X+Y$: pour toute valeur k prise par $X+Y$, $P(X+Y=k)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X=a_i\}\cap\{Y=b_j\})$ où $a_i+b_j=k$.

Exemple : *On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :*
• La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur "pile", on gagne 1 €, si on tombe sur face, on gagne 2 €.
• La deuxième partie consiste à lancer un dé à six faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le "3" ou le "5", on gagne 2 €. Si on tombe sur le "1", on perd 5 €.
La variable aléatoire X désigne les gains de la 1ère partie et la variable aléatoire Y désigne les gains de la 2ième partie. Les variables aléatoires sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

corrigé en vidéo

Définition 2.

Soit a un réel non nul.

• La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles $a\times a_i$ avec $1\leq a_i\leq n$

• Loi de probabilité de aX : pour toute valeur k prise par aX, $P(aX=k)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X=a_i\})$ où $a\times a_i=k$.

Exemple : On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu et Y celle qui donne le double de ce numéro. Alors $Y = 2X$.

Propriété 1. Linéarité de l'espérance

Soient a et b deux réels.

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX+b) = aE(X) + b$

Exemple : On lance un dé jaune et un dé vert équilibrés et comportant chacun six faces numérotées de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires donnant respectivement les résultats affichés par le dé jaune et le dé vert.

$E(X) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

De même, $E(X) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Donc $E(X+Y) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$.

Lorsqu'on lance deux dés, la somme obtenue est en moyenne 7 sur un très grand nombre de lancers.

Propriété 2. *Variance*

Soient a et b deux réels.

- **$V(aX+b) = \dots\dots\dots\dots$**
- **Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes,**

$V(X+Y) = \dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots$

Remarque : On rappelle que l'écart-type d'une variable aléatoire est égale à $\sigma(X) = \dots\dots\dots$.

Exercice ❶

Le nombre de spectateurs pour un festival de musique définit une variable aléatoire X d'espérance 12 000 et de variance 1 500. Chaque billet est vendu au tarif de 45 € et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 €.
Soit B la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.
Déterminer $E(B)$ et $\sigma(B)$.

Exercice ❷

On considère que pour la session 2022 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $E(X) = 5{,}4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$.
Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5.
Ainsi il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX+b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

1) Exprimer $E(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$ en fonction de a et b.

2) En déduire les valeurs de a et b.

Exercice ❸

Un sac contient cinq clés USB dont deux clés d'une valeur de 10 € et trois clés d'une valeur de 30 €. A l'issue d'une épreuve sportive, le vainqueur tire au hasard dans ce sac une clé USB puis, sans remettre la clé dans le sac, il tire une seconde clé.
On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage associé le prix de la clé obtenue, et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le prix de la clé obtenue.
On note S la variable aléatoire qui, aux deux tirages, associe la somme des prix ces clés gagnées.

1) Quelles sont les valeurs prises par S ?
2) a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3) a) Construire un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.
   b) Calculer $P(Y=10)$.
   c) En déduire la loi de probabilité de Y.
   d) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
4) a) Calculer $P(S=20)$, puis $P(S=60)$.
   b) Déterminer la loi de probabilité de S.
   c) Calculer $E(S)$ et $V(S)$. Que constate-t-on ?

3. Échantillon d'une variable aléatoire

On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.
Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre ……..
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ forme un échantillon de taille …….. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre ……...

Définition 3. *Échantillon*

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une ……….. de n variables aléatoires ………………………….. suivant cette loi.

Définition 4. *Variable aléatoire somme d'un échantillon*

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n d'une loi de probabilité donnée.
On appelle variable aléatoire somme de l'échantillon la variable définie par :

$$S_n = ... + ... + ... + ...$$

Exemple : *Soit X la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issue d'une chaîne de production, associe sa masse en grammes. On note X_i la variable aléatoire qui, à chaque lot de 3 paquets de chips, associe la masse du i-ème paquet.*
Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi que X, donc (X_1, X_2, X_3) est un échantillon de taille 3 de la loi X.
La variable aléatoire somme S_3 définie par $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ associe à chaque lot sa masse en grammes.

Propriété 3. ***Variance d'une variable aléatoire somme d'un échantillon***

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
Soit $S_n = X_1 + X_2 + ...+ X_n$. On a :

$E(S_n) = ...$; $V(S_n) = ...$ et $\sigma(S_n) = ...$.

Démonstrations : $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = ...$

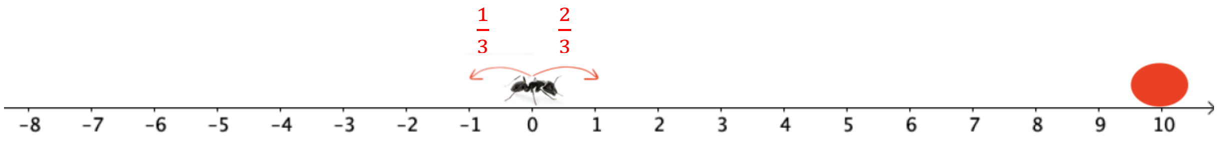
Or toutes les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que X, donc $E(X_1) = E(X_2) = ... = E(X_n) = ...$. Par suite, $E(S_n) = ...$.

$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = ...$

Or toutes les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que X, donc $V(X_1) = V(X_2) = ... = V(X_n) = ...$. Par suite, $V(S_n) = ...$.

$\sigma(S_n) = ... = ... = ...$

Exercice ❹
Sur un axe gradué, on dépose une petite goutte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10.
Pierrot invite Sophie la fourmi à se placer à l'origine de l'axe gradué.
Attirée par la confiture, Sophie se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.
On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au k-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.
On note $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la variable aléatoire somme des X_k.



1) Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2) En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

3) Au bout de combien de déplacements, Sophie peut-elle espérer théoriquement atteindre la goutte de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

Exercice ❺

Au 1er janvier 2020, le prix du timbre pour une enveloppe de 20 g ou moins s'élève à 0,95 € pour les timbres gris, 0,97 € pour les timbres verts, 1,16 € pour les timbres rouges et 1,40 € pour les timbres internationaux.
On se rend dans un bureau de poste et le directeur d'établissement donne les informations suivantes sur l'affranchissement des lettres de 20 g ou moins.

Prix du timbre (en €)	0,95	0,97	1,16	1,40
Fréquence (en %)	12	56	20	12

On prélève 20 enveloppes de 20 g ou moins de ce bureau de poste. On supposera que le nombre de lettres est suffisamment important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise.
Pour tout entier k de $\{1 ; 2 ; ... ; 20\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au prix du timbre de la k-ième enveloppe choisie et $S_{20} = X_1 + X_2 + ... + X_{20}$.

1) À quoi la variable aléatoire S_{20} correspond-elle ?

2) En moyenne, à combien le prix des 20 timbres s'élève-t-il ? Justifier.

3) Déterminer la valeur exacte de $\sigma(S_{20})$.

Exercice ❻

Quand il joue au bowling, Matéo a une probabilité égale à 0,1 de faire un strike.
Il lance 10 fois la boule de manière indépendante. Pour tout nombre entier naturel k compris entre 1 et 10, X_k est la variable aléatoire prenant la valeur 1 s'il fait un strike et 0 sinon, au k-ième lancer.

1) Que peut-on dire de la variable aléatoire $S_{10} = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$?

2) Calculer $E(S_{10})$ et $V(S_{10})$.

Propriété 4. *Échantillon de la loi de Bernoulli*

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.

La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ..., + X_n$ suit la ………………… de paramètres n et p.

Propriété 5. *Espérance et écart-type d'une loi binomiale*

Si S suit une loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n ; p)$, alors $E(S) =$ ……….,

$V(S) =$ ………… et $\sigma(S) =$ ………….

Démonstration : Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p. On rappelle que pour une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli, on a $E(X) = ...$ et $V(X) = ...$.

Alors $E(S) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = ... = ...$.

Comme toutes les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes,

$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) = ...$

D'où $V(X) = ...$.

Par suite, $\sigma(S) = ... = ...$.