

CALCUL INTÉGRAL

Objectifs :

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

1. Notion d'intégrale

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a ; b]$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

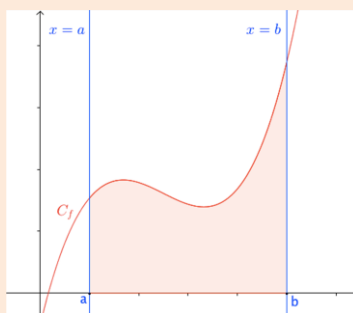
Définitions 1. Aire sous une courbe et intégrale de f sur un intervalle

On appelle :

- **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle bâti à partir des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ ($a \neq b$).

Ce domaine est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et

$$0 \leq y \leq f(x).$$



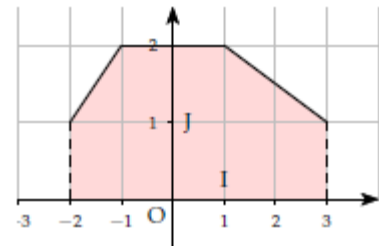
- **Intégrale de f sur $[a ; b]$** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$. On la note : $\int_a^b f(x) dx$, qui se lit « intégrale de a à b de f ». a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Le symbole $\int$ est un S stylisé (initiale de somme) afin de rappeler que l'intégrale peut être obtenue comme limite d'une somme d'aires de rectangles. Ce symbole a été introduit par Leibniz au XVII^e siècle, mais la notation $\int_a^b$ a été introduite par le français *Joseph Fourier* (1768 ; 1830). Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Exemple : On donne la représentation ci-contre d'une fonction f sur $[-2 ; 3]$, ainsi que les mesures : $OI = 2$ cm et $OJ = 3$ cm.

Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$, puis en déduire l'aire en cm^2 de la partie grisée.



$\int_{-2}^3 f(x) dx = \dots\dots\dots$. Or 1 u.a. = $\dots\dots\dots = \dots\dots \text{cm}^2$ et $\dots\dots \times \dots\dots = \dots\dots$, donc l'aire de la surface grisée est égale à $\dots\dots \text{cm}^2$.

Remarques : • $f(x)dx$ est l'aire d'un rectangle de dimensions $f(x)$ et dx .

• La variable x est dite muette et peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

Exercice ❶

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

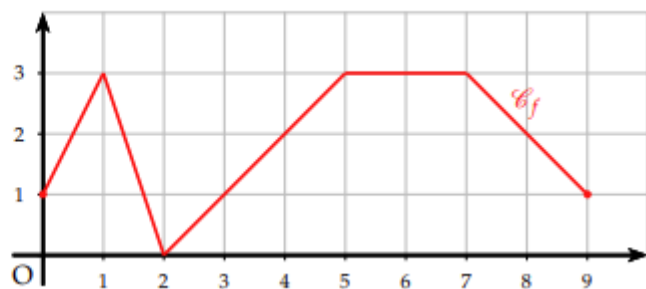
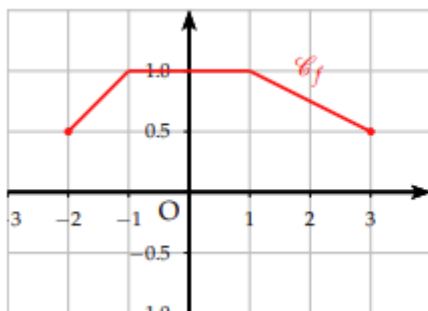
b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.



[correction en vidéo](#)

Exercice ❷

Pour chaque fonction affine définie par morceaux f , représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale I de f sur l'intervalle de définition de f .



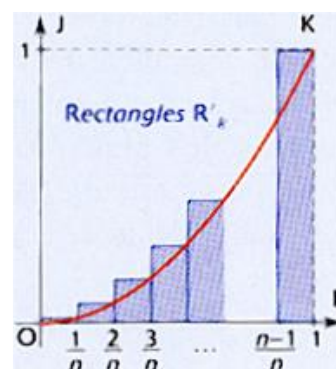
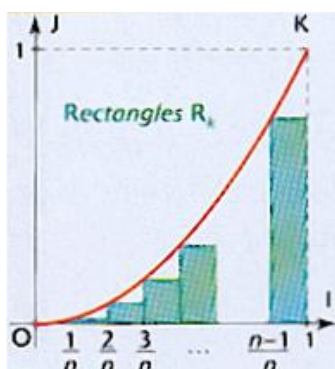
2. Méthode des rectangles

Calculer l'intégrale de la fonction carrée sur $[0 ; 1]$.

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ est la courbe qui représente la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$. $\mathcal{D}$ est le domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.

On choisit de prendre l'aire du carré OIKJ pour unité d'aire et on se propose de déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$. Pour cela :

- on subdivise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;
- sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ et le rectangle R'_k de hauteur $\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$.



On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n la somme des aires des rectangles R'_k . On peut démontrer que : $u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et $v_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = u_n + \frac{1}{n}$.

On en déduit que : $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$.

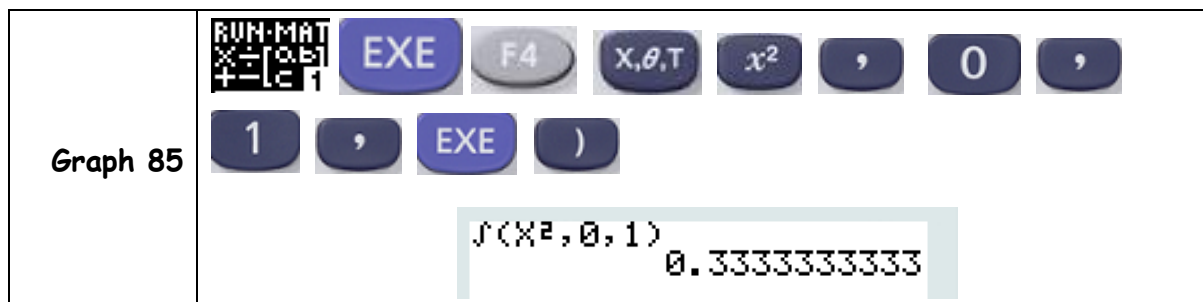
$$u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$ (par produit et somme de limites).

Comme $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$, d'après le théorème des , on en déduit que $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$, et par suite, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Utilisation de la calculatrice

TI 83	tests A	math	précéd résol	entrer	catalog	0	↑	L1	1	Y
	8	échanger x,t,θ,n	√	x²	échanger x,t,θ,n	précéd résol	entrer			
$\int_0^1 (x^2) dx$ $.3333333333$										



Programme en Python

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

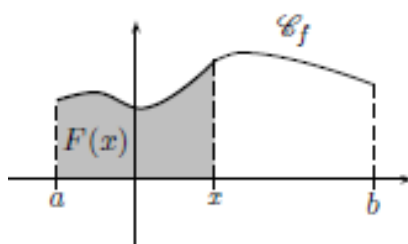
3. Fonction définie par une intégrale

Théorème 1. Existence d'une primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est la fonction

La fonction F est donc une primitive de f : c'est LA de f sur $[a ; b]$ qui s'annule en a .



Démonstration dans le cas où f est positive et croissante : Soit $x_0 \in [a ; b]$ et h un réel non nul tel que $(x_0 + h) \in [a ; b]$.

- Si $h > 0$: Par définition, $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$.

Par suite, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire de la partie grisée ci-contre.

Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABCD.

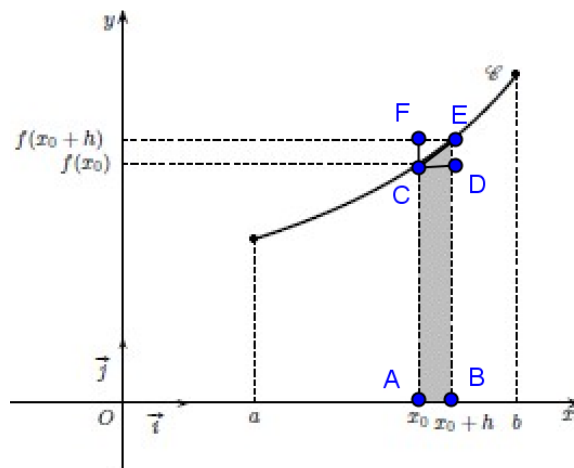
Or l'aire du rectangle ABCD est égale à

..... $\times$, et celle du rectangle ABFE est

égale à $\times$

On en déduit alors que :

..... $\times$ $\leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq$ $\times$



Comme $h > 0$, on obtient : $\leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq$

Or f est continue sur $[a; b]$, donc en x_0 , alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) =$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} =$

• Si $h < 0$: par un raisonnement analogue, on obtient :

$$-h \times f(x_0 + h) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0).$$

Comme $-h > 0$, alors $f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$, ou encore

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0). \text{ Par conséquent, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

• Finalement, f est dérivable pour tout x_0 de $[a; b]$, et $F'(x_0) = f(x_0)$.



[Démonstration en vidéo](#)

Exercice ③

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

- 1) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer le tableau de variations de g .

4. Calculs d'intégrales

Propriété 1. Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I .

Si F est une primitive quelconque de f sur I , $\int_a^b f(x) dx = [.....]_a^b =$

Démonstration : La dérivée de la fonction G définie sur $[a; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la fonction Donc G est une primitive de sur $[a; b]$.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a ; b]$, on a $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante réelle.

De plus, $G(a) = \int_a^{\dots} f(t) dt = \dots$ et $G(a) = F(a) + C$, donc $F(a) = \dots$ et par suite, $C = \dots$.

On en déduit que $G(b) = \int_a^b f(t) dt = \dots = \dots$.

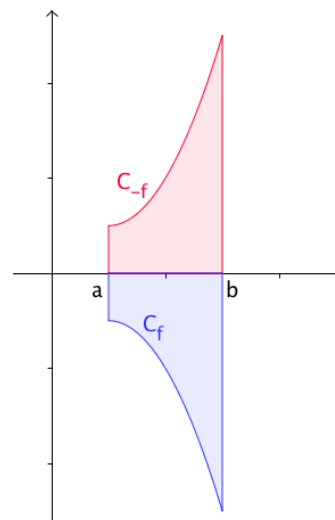
Remarque : La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.

Ainsi pour une fonction f négative sur $[a ; b]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) - F(a) = -G(b) + G(a) \\ &= -(G(b) - G(a)) \\ &= -\int_a^b (-f)(t) dt \end{aligned}$$

où G est une primitive de la fonction $-f$.

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a ; b]$.



Exercice 4

Calculer, à l'aide des primitives, les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx$; b) $\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1) dx$; c) $\int_{-1}^1 e^{-2x} dx$



Corrigés en vidéos : [a\)](#) ; [b\)](#) et [c\)](#)

Exercice 5

Calculer les suivantes à l'aide d'une primitive :

a) $\int_0^4 (x - 3) dx$; b) $\int_1^2 \left(x^2 + x - \frac{1}{x} \right) dx$; c) $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} 5e^{3x} dx$;
d) $\int_1^2 \frac{1}{3x - 2} dx$; e) $\int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3) dt$; f) $\int_0^1 x e^{x^2 - 1} dx$

Propriétés 2.

Soit f une fonction continue sur I , et, a , b et c trois réels de I .

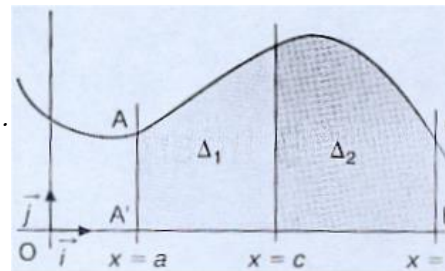
$$\int_a^a f(x) dx = 0 ; \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

relation de Chasles

Démonstration de la relation de Chasles :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= (F(\dots) - F(\dots)) + (F(\dots) - F(\dots)) \\ &= F(\dots) - F(\dots) \\ &= \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$



Propriétés 3. Propriétés de linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I .

Pour tout réel k , $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Démonstrations : Soit F une primitive de f sur I . Soit G une primitive de g sur I . Soit k un réel.

$$\int_a^b k f(x) dx = (\dots)(\dots) - (\dots)(\dots) = \dots (F(\dots) - F(\dots)) = \dots$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (f + g)(x) dx &= (\dots)(b) - (\dots)(a) = \dots(b) + \dots(b) - \dots(a) - \dots(a) \\ &= \dots + \dots\end{aligned}$$

Exercice 6

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$.

a) Calculer $A + B$ et $A - B$

b) En déduire A et B .



[correction en vidéo](#)

5. Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriétés 4 (admisses). Inégalités et intégration

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et a et b deux réels de I , avec $a \leq b$.

Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \dots$

Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_a^b f(x) dx \dots \int_a^b g(x) dx$.

Démonstrations : • Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est

..... Par suite, $\int_a^b f(x) dx \dots$

- Si $f(x) \leq g(x)$ alors $g(x) - f(x) \dots\dots\dots$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \dots\dots\dots$

D'après les propriétés 6 et 7, on obtient $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \dots\dots\dots$

Par conséquent, $\int_a^b g(x) dx \dots\dots\dots \int_a^b f(x) dx$.

Exercice 7

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.



[correction en vidéo](#)

Exercice 8

Démontrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 1$.

Propriété 5. Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur I , alors l'aire comprise entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ u.a.

Exercice 9

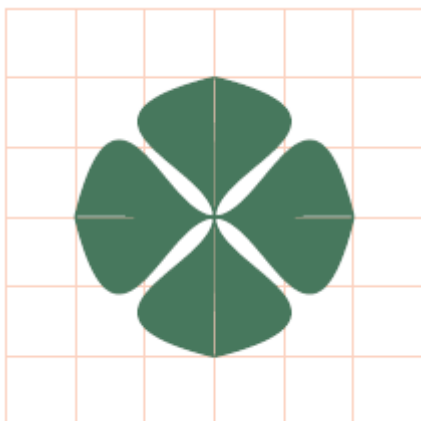
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



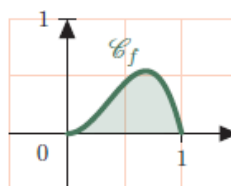
[correction en vidéo](#)

Exercice 10



Le trèfle à quatre feuilles ci-contre a été obtenu à partir de la courbe de la fonction f (définie ci-dessous) par un jeu de symétries et de rotations.

La fonction f , représentée ci-dessous, est définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2$.



Montrer que son aire est égale à 2,4 u.a.

6. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 2. Valeur moyenne d'une fonction

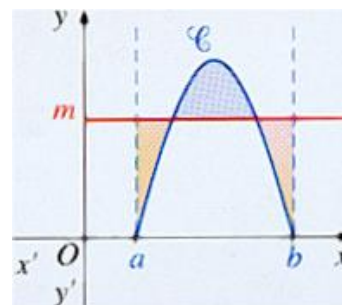
Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est le nombre réel : $\mu = \dots\dots\dots$

Si $f(x) > 0$, on s'intéresse au rectangle de largeur $b - a$ dont l'aire est égale à l'aire de la surface hachurée : c'est la longueur m de ce rectangle que l'on appelle « valeur moyenne de f » sur $[a ; b]$.

Si f est une fonction constante sur $[a ; b]$, sa valeur moyenne sur $[a ; b]$ est égale à cette constante.

En fin de compte, la technique est de remplacer f par une fonction constante de même intégrale sur le même intervalle.



Exercice 11

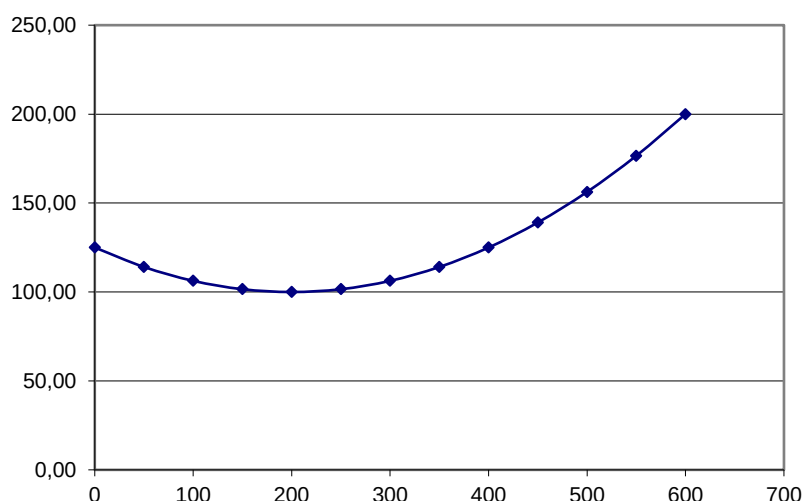
On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie. Au 10^{ème} jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$. Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.



[correction en vidéo](#)

Exercice 12

On voudrait niveler le terrain décrit ci-dessous. À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ?



$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125$$

Déterminer une primitive de la fonction h , puis calculer la valeur moyenne μ de h sur l'intervalle $[0 ; 600]$. Démontrer ainsi le résultat conjecturé lors de la première partie de ce problème.

Exercice 13

On injecte dans le sang un médicament.

On note t le temps (en heures) écoulé depuis l'injection du produit.

La concentration C du médicament (en grammes par litre de sang) en fonction de t est donnée sur $[0 ; +\infty[$ par $C(t) = 5te^{-t}$.

1) Montrer qu'une primitive de C sur $[0 ; +\infty[$ est définie par $F(t) = 5(-t-1)e^{-t}$.

2) En déduire la concentration moyenne pendant la première heure après injection.

Exercice 14

Soit la valeur moyenne $\mu = 2$ d'une fonction f sur $[1 ; 4]$. Calculer $\int_1^4 f(x)dx$.

7. Intégration par parties

Introduction : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = te^t$.

Déterminer la dérivée de f et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$.

$$\int_a^b u'(x) \times v(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x) dx.$$

Démonstration : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$, on a :

$(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions u , u' , v et v' étant continues sur $[a ; b]$, $u'v$, uv' et donc $(uv)'$ le sont également.

Alors : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Une des primitives de $(uv)'$ est la fonction uv donc : $\int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$; d'où le résultat.



[démonstration en vidéo](#)

Exercice 15

Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$.



[correction en vidéo](#)

Exercice 16

Calculer l'intégrale $\int_1^{e^2} \ln(x) dx$.

8. Intégrale et suites

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.
 - b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H .

- c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A , x et h des réels.

```

A ← 0
x ← 0
h ← 1/K
Pour i variant de 1 à K
    A ← A + h × f(x)
    x ← x + h
Fin Pour
  
```

- 1) Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

- 2) En l'illustrant sur l'annexe, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.
- 3) Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Annexe

