VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Objectifs :

- *Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.*
- *Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.*
- *Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.*
- *Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.*
- *Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.*
- *Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).*

1. Vecteurs de l'espace

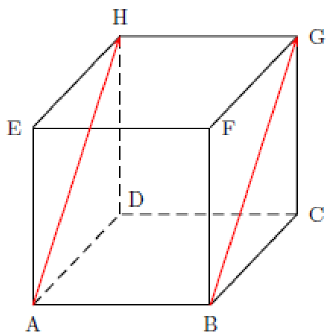
Définition 1. *Vecteur de l'espace*

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, si et seulement si, *ABDC* est

………………………………………………..

Remarque : Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane (relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …) restent valides.

Remarque : Dans le cube ABCDEFGH, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car ABGH est un ………………...



Définition 2. *Translation*

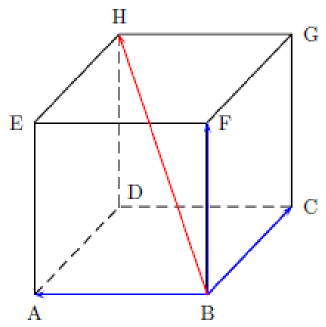
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point *M* associe le point *M'* tel que ……… = ……… .

Définition 3. ***Combinaison linéaire de vecteurs***

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} =$ ....

Remarques : • Dans le cas où $\vec{v} = a\vec{u}$, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, on dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exemple : Dans le cube ABCDEFGH, une écriture du vecteur $\overrightarrow{BH}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ est : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

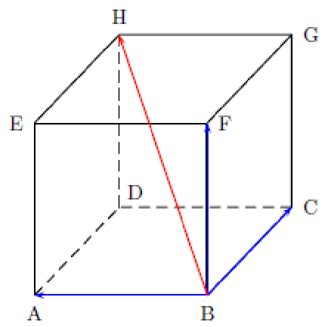


Exercice ❶
À l'aide du cube représenter les vecteurs donnés par :

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$

$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$

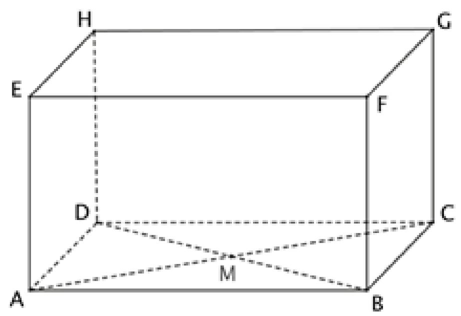


corrigé en vidéo

Exercice ❷

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle ABCD.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

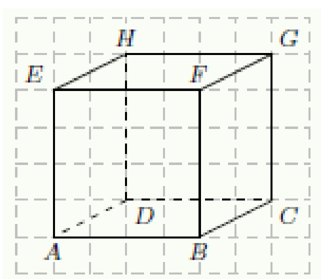


corrigé en vidéo

Exercice ❸

Reproduire le cube *ABCDEFGH*, puis placer les points *M* et *N*, définis par les combinaisons linéaires suivantes :

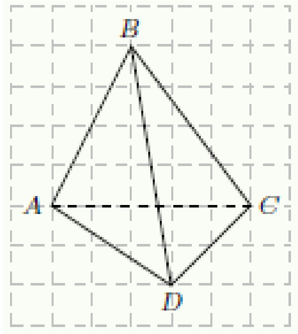
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AN}$.



Exercice ❹

Reproduire le tétraèdre *ABCD*, puis placer les points *M* et *N*, définis par les combinaisons linéaires suivantes :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

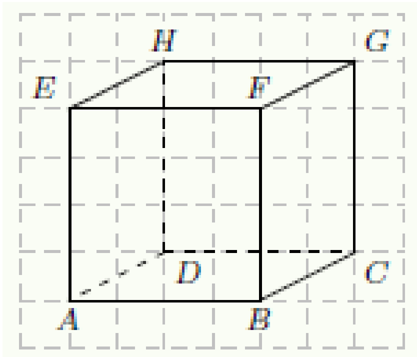


Exercice ❺
Soit le cube *ABCDEFGH* représenté ci-contre.

1) Placer les points I, J, K et L définis par

I est le milieu de l'arête $[FG]$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$, K est le milieu du segment $[FH]$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$.

2) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



Exercice ❻
Soit *ABCD* un tétraèdre.
On définit ainsi les points I, J, E et F : I est le milieu de l'arête $[AB]$; J est le milieu de l'arête $[AC]$; $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

1) Placer les points I, J, E et F.
2) Exprimer $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ en fonction de $[DI]$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IJ}$.
4) Justifier que les points D, I, J et F sont coplanaires.

2. Droites de l'espace

Définition 4. *Droite de l'espace*

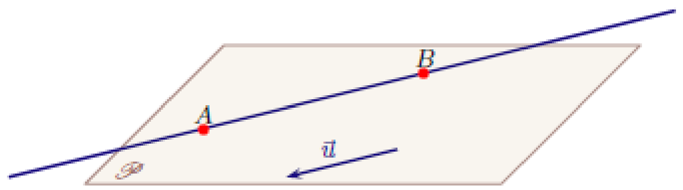
Une droite de l'espace est définie :

• soit par la donnée ……………………………………….. ;

• soit par la donnée ……………………………………...

Propriété 1. *Caractérisation d'une droite*

La droite passant par *A* de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient ………………………..



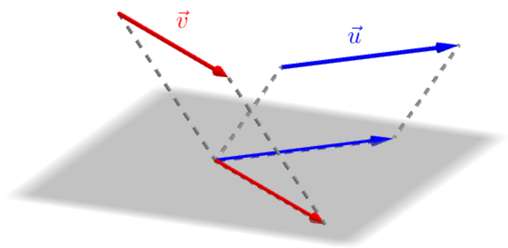
3. Plans de l'espace

Définition 5. *Plan de l'espace*

Un plan de l'espace est défini :

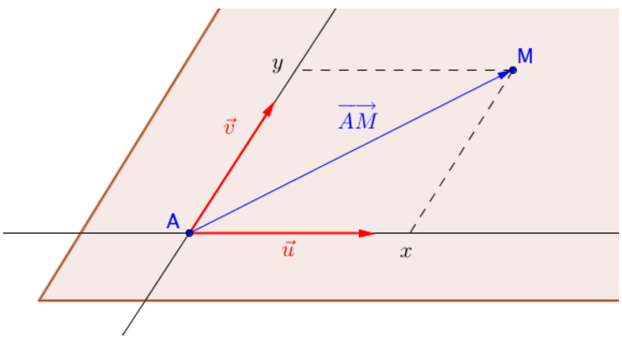
• soit par ……………………………………………………………… ;

• soit par ………………………………………………………………



Propriété 2. *Caractérisation d'un plan*

Soit un point *A* et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, où x et y sont des réels, est le plan passant par *A* et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Démonstration : Soient deux points *B* et *C* tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (AC) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Soit *M* un point vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

On considère le point N du plan (ABC) qui admet pour coordonnées $(x\ ;y)$ dans le repère $(A\ ;\vec{u},\ \vec{v})$. Alors $\overrightarrow{AN} = x\vec{u} + y\vec{v}$; par suite, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, et on en déduit que les points M et N sont confondus. Donc M appartient au plan (ABC).

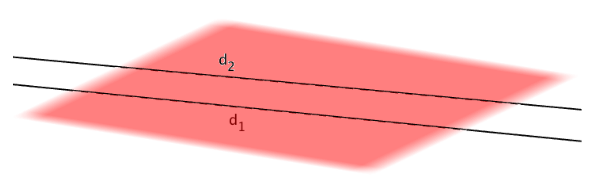
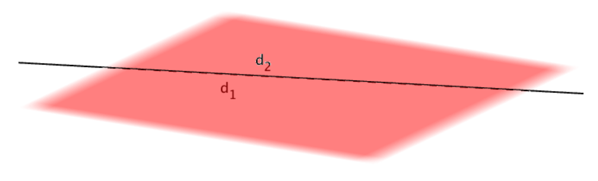
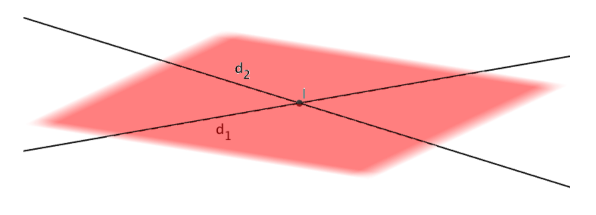
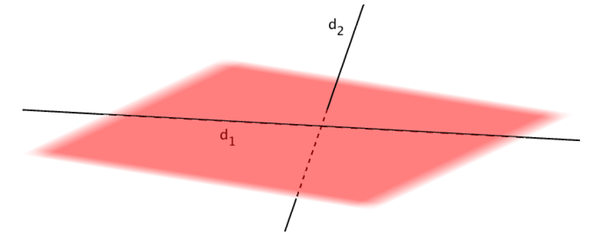
Réciproquement, tout point M du plan (ABC) admet dans le repère $(A\ ;\vec{u},\ \vec{v})$ des coordonnées $(x\ ;y)$ telles que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Remarque : Deux plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

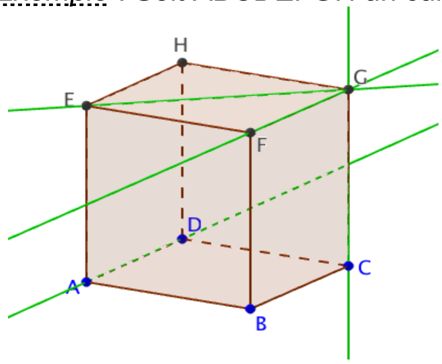
4. Positions relatives de droites et plans de l'espace

Propriété 3. *Positions relatives de deux droites*

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan), soit non coplanaires.

	
Droites distinctes ……………………………. : **leur intersection est …………..**	Droites ………………………………………. : **leur intersection est ………………………..**
	
Droites ………………………………………. : **leur intersection est ………………..**	Droites non coplanaires : **leur intersection est …………….**

Exemple : Soit ABCDEFGH un cube.



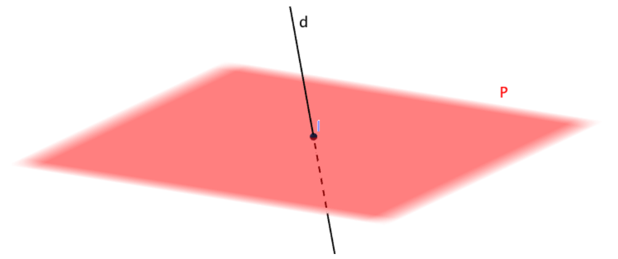
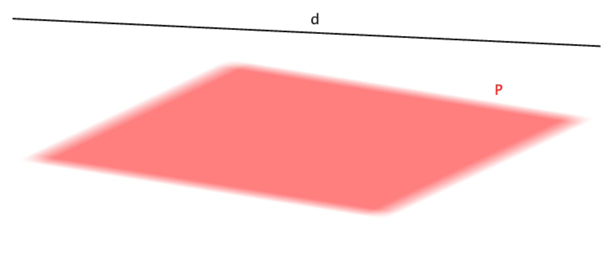
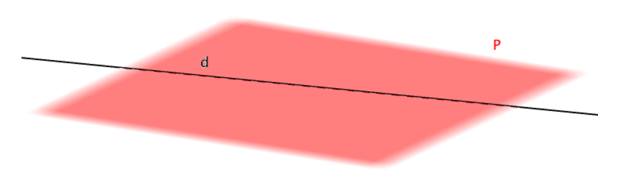
Les droites (AD) et (BC) appartiennent au même plan …………… et sont ……………..

Les droites (AD) et (GC) ………………… coplanaires.

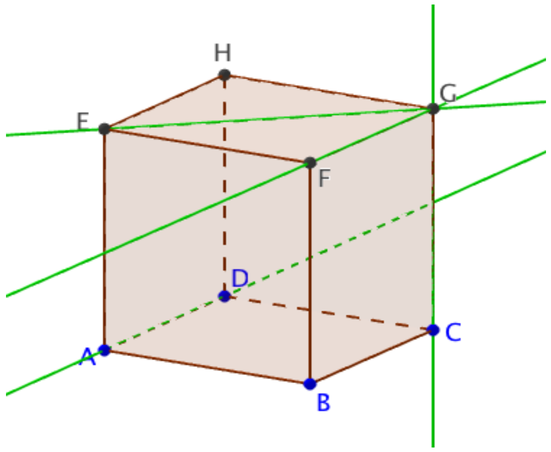
Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan ………………. et sont sécantes en …..

Propriété 4. *Positions relatives d'une droite et d'un plan*

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

	
La droite et le plan sont ……………………… ………………………………………………	La droite est ………………………….. plan : **leur intersection est …………………**
	
La droite est …………………………… plan : **leur intersection est ……………………..**	

Exemple : Soit ABCDEFGH un cube.



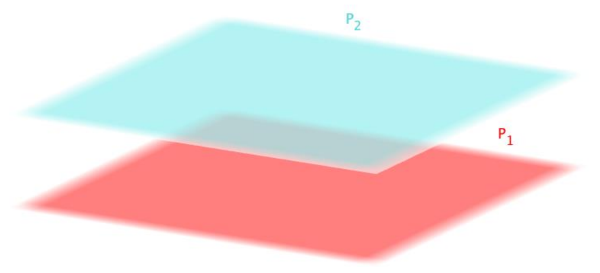
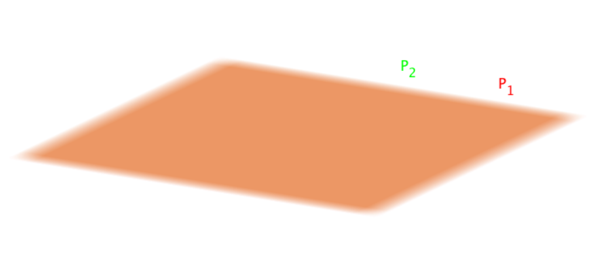
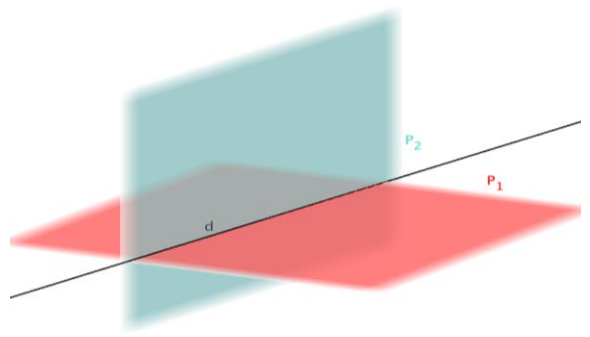
La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG) ; leur intersection est ………..

Les droites (EG) est ………………………… au plan (ABC) .

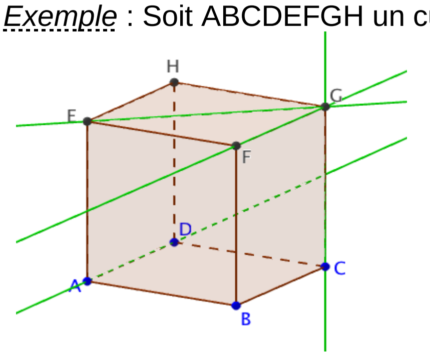
La droite (EG) et le plan (CBF) sont sécantes en …….

Propriété 5. *Positions relatives de deux plans*

Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

	
Les deux plans sont strictement …………… : **leur intersection est …………….**	Les deux plans sont …………………… : **leur intersection est ………………..**
	
Les deux plans sont …………………… : **leur intersection est …………………**	

<u>Exemple</u> : Soit ABCDEFGH un cube.



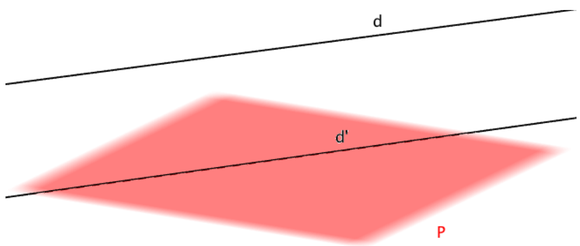
Les plans (ABC) et (EFG) sont ………… …………………………………………………

Les plans (AEG) et (EFG) sont sécants suivant la droite ……………

5. Parallélisme

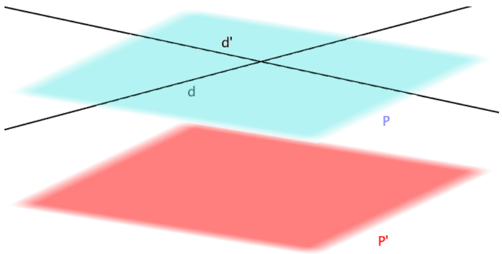
Propriété 6. ***Droite parallèle à un plan***

Si une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à une droite $\mathscr{D}'$ contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est ……………………….. à $\mathscr{P}$.



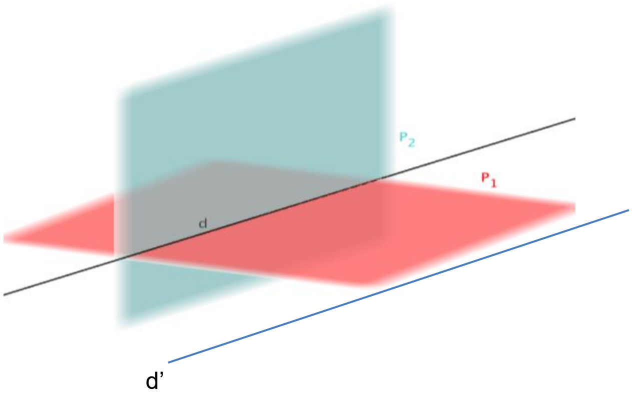
Propriété 7. *Plans parallèles*

Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' parallèles à un plan $\mathscr{P}$ ' alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ ' sont ……………………………..



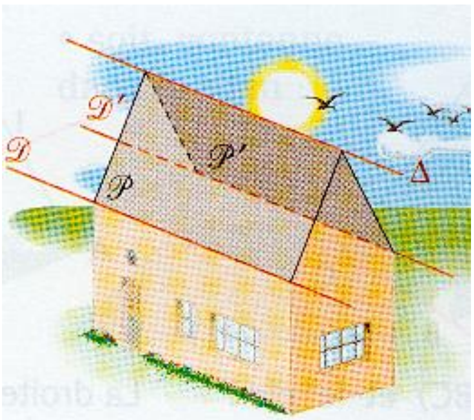
Propriété 8. *Droites parallèles*

Si une droite *d'* est parallèle à deux plans P_1 et P_2 sécants en une droite *d*, alors *d* et *d'* sont

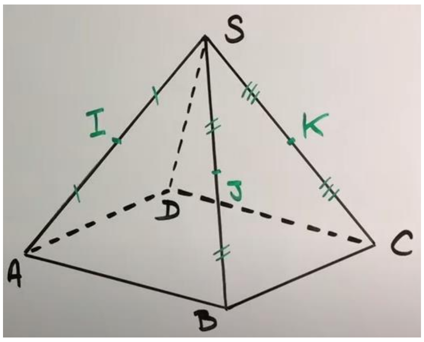


Théorème 1. *Théorème du toit*

Si deux plans sont sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' contiennent respectivement deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$', leur intersection Δ est ……………………………………………..



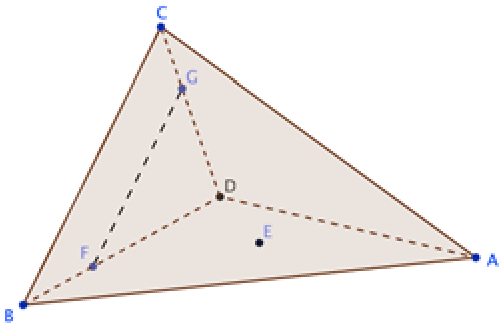
Exercice ❼



SABCD est une pyramide.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$
Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles

[corrigé en vidéo]

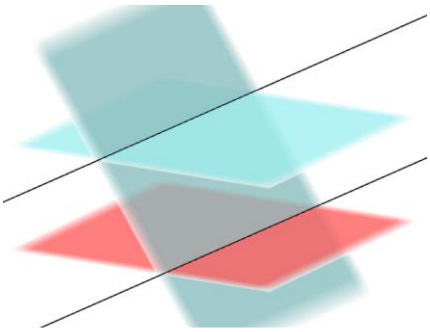
Exercice ❽



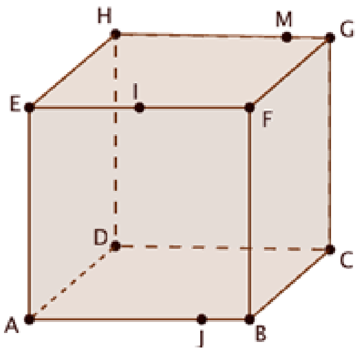
ABCD est un tétraèdre.
Le segment [*FG*] est parallèle à l'arête [*BC*].
E est un point du plan (*ABC*).
Construire l'intersection du plan (*EFG*) avec la pyramide.

Théorème 2. ***Théorème de l'étagère***

Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont ....



Exercice ❾



Déterminer et construire l'intersection du plan (IMJ) et du cube *ABCDEFGH*.

Exercice ⑩

ABCDEFGH est un cube. *I*, *J*, *K* et *L* sont les milieux respectifs des segments [*EH*], [*EF*], [*HG*] et [*GF*].

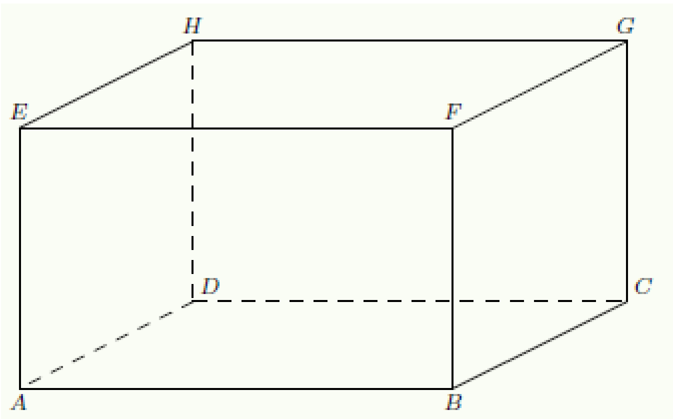
1) Faire une figure.
2) a) Montrer que les droites (*DB*) et (*KL*) sont parallèles.
   b) Déterminer l'intersection des plans (*BKL*) et (*ABC*).
3) a) Montrer que les droites (*LB*) et (*IA*) sont parallèles.
   b) Que peut-on dire des plans (*BKL*) et (*AIJ*) ? Justifier.

Exercice ❶❶

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (c'est-à-dire un pavé droit).

On considère les points *I*, *J* et *K* définis par $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{GJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

1) Placer les points *I*, *J* et *K*.
2) Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HG}$.
3) Montrer que les plans (AIJ) et (GHK).



Exercice ❶❷

ABCDEFGH est un cube. On considère les points *I* et *J* définis par $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Faire une figure.
2) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3) Déterminer deux réels x et y tels que $\overrightarrow{HI}=x\overrightarrow{EG}+y\overrightarrow{GJ}$.
4) Que peut-on en déduire pour la droite (HI) et le plan (EGJ) ?

6. Repérage de l'espace

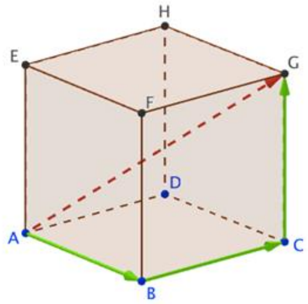
Définition 6. ***Base de l'espace***

On appelle base de l'espace tout triplet $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

Exemple : Soit le cube *ABCDEFGH* ci-contre.

Le triplet $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace car ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Dans cette base, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ s'écrit : $\overrightarrow{AG} = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$.



Définition 7. ***Repère de l'espace***

On appelle repère de l'espace tout quadruplet $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ avec *O* un point de l'espace, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

Remarque : *O* est appelé origine du repère.

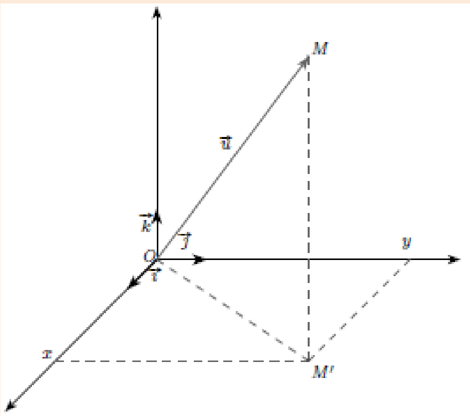
Définition 8. ***Coordonnées d'un point de l'espace***

Pour tout point *M* de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels tel que

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est appelé triplet de coordonnées du point *M* ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote.



Exercice ❶❸

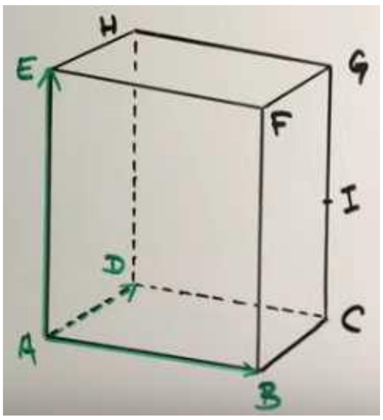
Soit un parallélépipède *ABCDEFGH*.

I est le milieu de $[CG]$. *M* et *N* sont définis par :

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$.

1) Donner les coordonnées de tous les points dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2) Placer le point K de coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;-1)$.



corrigé en vidéo

Propriétés 9. *Coordonnées d'un vecteur et d'un milieu*

Soient $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ deux points de l'espace.

- **Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (............... ; .... ; ....).**
- $AB = \sqrt{(...............)+(...............)+(...............)}$
- **Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées (.............. ; .... ; ....)**

Exercice ❶❹

Dans un repère de l'espace $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on considère les points $A(2\ ;-1\ ;\ 4)$, $B(6\ ;-7\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $D(13\ ;-16\ ;\ 5)$.

Démontrer que les points *A*, *B*, *C* et *D* sont coplanaires.

corrigé en vidéo

Exercice ❶❺

Soient quatre points $A(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;-2\ ;\ 1)$, $C(5\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et $D(-3\ ;-5\ ;\ 6)$.

1) Montrer que *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.
2) Montrer que *A*, *B*, *C* et *D* sont coplanaires.

Exercice ❶❻

Soient les points $A(6\ ;\ 8\ ;\ 2)$, $B(4\ ;\ 9\ ;\ 1)$ et $C(5\ ;\ 7\ ;\ 3)$ dans un repère orthonormal.

Montrer que le triangle *ABC* est rectangle.

Exercice ❶❼

ABCDEFGH est un cube.

Soit I le milieu de $[AH]$ et *J* le point de $[FI]$ tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.

Démontrer que les points E, J et C sont alignés.