PRINCIPE DU RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Cours	**Terminale Spé maths**

Objectifs :
- *Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.*
- *Recherche de seuils.*

1. Sens de variation d'une suite

Définition 1. ***Sens de variation d'une suite***

- **Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.**
- **Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.**
- **Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.**
- **Une suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.**

Méthode pour déterminer le sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :

- Calculer, pour tout de **N**, la différence $u_{n+1} - u_n$, puis étudier le signe de cette différence.
- Si tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on peut calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis comparer ce quotient à 1.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante ; si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

a) Exemple 1

*Soit (u_n) la suite définie pour tout n de **N** par $u_n = 2^n + n$.*
Cette suite est-elle monotone ?

$$u_{n+1} - u_n = (2^{n+1} + n + 1) - (2^n + n) = 2^{n+1} - 2^n + 1 = 2^n \times (2-1) + 1 = 2^n + 1.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

C. Lainé

b) Exemple 2

Soit (v_n) la suite définie pour tout n de **N** *par $v_n = 1,01^n$.*
Cette suite est-elle monotone ?

Pour tout n de **N**, $1,01^n > 0$, d'où : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1,01^{n+1}}{1,01^n} = 1,01^{n+1-n} = 1,01$.

Comme 1,01 > 1, alors la suite (v_n) est strictement croissante.

Exercice ❶

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 5$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice ❷

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 par $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Étudier les variations de (u_n).

corrigé en vidéo

Exercice ❸

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Étudier les variations de (u_n).

corrigé en vidéo

Propriété 1. ***Sens de variation d'une suite définie de façon***

Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$.
Soit (u_n) la suite définie de façon explicite par $u_n = f(n)$. Alors :
- Si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple : *Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + n^2$.*
Cette suite est-elle monotone ?

Soit la fonction *f*, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, par $f(x) = 1 + x^2$.
La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

☠ Remarques : • Cette méthode ne s'applique pas aux suites définies de manière récurrente.
• Les réciproques sont fausses.

2. Suite majorée, suite minorée

Définition 2. ***Suite majorée, suite minorée***

- **Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.**
- **Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.**
- **Une suite (u_n) est bornée si elle majorée et minorée**

Exercice ❹

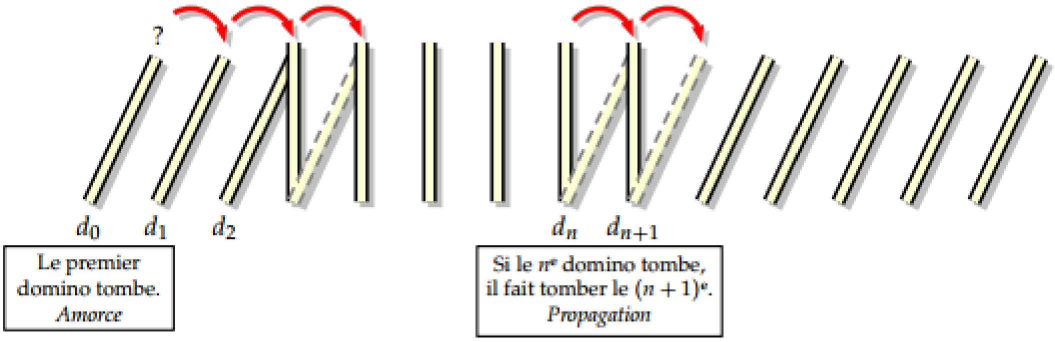
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 + \frac{2}{n}$.

Démontrer que (u_n) est bornée.

3. Raisonnement par récurrence

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932) que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

Le raisonnement par récurrence s'apparente à la théorie des dominos. On considère une file de dominos espacés régulièrement.



On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent. .

Définition 3. ***Propriété héréditaire***

Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier k supérieur ou égal à n_0, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier k+1.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant (k +1) tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence

Si la propriété $\mathscr{P}$ est :
- vraie au rang n_0 (Initialisation)
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité), alors la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$.
L'hérédité est vérifiée (voir plus haut). On en déduit que tous les dominos tombent.

Exercice ❺
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

corrigé en vidéo

Exercice ❻
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = 2v_n - 7$ et $v_0 = 4$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = 7 - 3 \times 2^n$.

Exercice ❼
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2$ et $v_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

Exercice ❽
On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1$ et $w_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que la suite (w_n) est majorée par 2.

Propriété 2. *Inégalité de Bernoulli*

Soit un nombre réel a strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$

Démonstration : Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $(1+a)^n \geq 1 + na$ »

→ *Initialisation* : Comme $(1+a)^0 = 1$ et que $1 + 0 \times a = 1$, alors on a bien $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$. Or $(1+a)^n \geq 1+na$, alors $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)\times(1+a)$.

D'où $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$. Comme $na^2 \geq 0$, alors $1+na+a+na^2 \geq 1+na+a$.

Par suite, $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2 \geq 1+ka+a$, car ka^2 ³ 0.

Et donc : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$. On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $(1+a)^n \geq 1+na$.

démonstration en vidéo