PRIMITIVES

Objectifs :
- *Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.*
- *Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction composée.*

1. Équation différentielle et primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1. ***Équation différentielle***

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et qui fait intervenir sa fonction dérivée et (ou) sa fonction dérivée seconde.

Exemple : L'équation d'inconnue y, $y'(t)=3t^2$ pour tout t de $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=t^3$ pour tout t de $\mathbb{R}$ en est une solution.

Exercice ❶
Prouver que la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x^2+\ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'(x)=6x+\dfrac{1}{x}$.

correction en vidéo

Exercice ❷
Soit l'équation différentielle $y'=2xy+4x$.
Vérifier que la fonction y définie par $y(x)=k\exp\left(x^2\right)-2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, ceci quel que soit le réel k.

Définition 2. ***Primitive d'une fonction***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée …………… est appelée primitive de f sur I. C'est une solution à l'équation différentielle d'inconnue y, …………….

Exemple : Soit les fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=2x+1$ et $g(x)=x^2+x+5$. On remarque que, pour tout réel x, $g'(x)=$................

Donc ……… est une primitive de ……… sur $\mathbb{R}$.

Exercice ❸
On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x\ln(x)-x$.
Démontrer que g est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice ❹
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=-\dfrac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. Propriétés des primitives

Propriété 1. Primitives d'une fonction

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration : Si F et G sont deux primitives de f sur I, considérons la fonction $G-F$ dérivable sur I. Elle vérifie, pour tout élément x de I :

$(G-F)'(x)=$................ $=$................ $=$................ $=$................

Donc $G-F=$......... sur I, où .... est une fonction constante, c'est-à-dire pour tout élément x de I, $G(x)=$........ $+$............ .

[démonstration en vidéo](#)

Exemple : Les fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=x^2+x$ et $g(x)=x^2+x+5$ sont des primitives de la fonction $x\mapsto 2x+1$.

Remarque : L'hypothèse ***I est un intervalle*** est fondamentale.
En effet, soit les fonctions F et G définies sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$F(x)=\frac{1}{x} \text{ et } \begin{cases} G(x)=\dfrac{1}{x}+1 \text{ si } x>0 \\ G(x)=\dfrac{1}{x}-1 \text{ si } x<0 \end{cases}.$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, F et G ont même fonction dérivée f : $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, mais il n'existe pas de fonction constante C telle que, pour tout x de $\mathbf{R}^*$, $G(x)=F(x)+C$.

Propriété 2. *Unicité d'une primitive*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, x_0 un nombre réel de I et y_0 un nombre réel. Il existe une et une seule primitive de F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exemple : Il existe une unique primitive F de $x \mapsto 2x+1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -2$.
En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto x^2 + x + C$ où C est un réel.
Comme $F(1) = -2$, alors $1^2 + 1 + C = -2$, c'est-à-dire $C = -4$.

Propriété 3. **Existence d'une primitive**

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : La forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue malgré le fait que son existence soit assurée par le théorème précédent.. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous une forme explicite.

3. Calcul de primitives

Propriété 4. *Primitives des fonctions de référence*

C désigne une constante quelconque.

Fonction	Primitives	Intervalle I
$f(x) = k$ (k constante réelle)		$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$		$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$		$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$		$\mathbb{R}^*$
$f(x) = e^x$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos(x)$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$		$\mathbb{R}$

Propriété 5. Linéarité des primitives

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- **………. est une primitive de la fonction $f+g$ sur I ;**
- **pour tout réel k, ………. est une primitive de kf sur I.**

Démonstration : Soit x un élément de I. Soit k un réel.

- $(F+G)'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; d'où ………… est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.
- $(kG)'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; d'où ……… est une primitive de kf sur I.

Attention ! : Une primitive d'un produit ne sera pas obtenue en prenant le produit des primitives, puisque la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Exercice ❺
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$; b) $f(x) = 4e^x 4$; c) $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

correction en vidéo

Exercice ❻
Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner toutes les primitives de f sur I :

a) $f(x) = 3x^3 - 5x$, $I = \mathbb{R}^{+}$; *b)* $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$, $I = \mathbb{R}$; *c)* $f(x) = \dfrac{e^x + 4}{3}$, $I = \mathbb{R}$

Propriété 6. Primitives de fonctions composées

C est une constante réelle, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie et dérivable sur I.

Fonction f	Primitives F de f sur I
$u'u^n$ où $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	
$u'e^u$	
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	
$u'\cos(u)$	
$u'\sin(u)$	

Exercice ❼

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a) $f(x) = xe^{x^2}$; b) $f(x) = e^{4x+1}$

correction en vidéo

Exercice ❽

Pour chacune des fonctions f suivantes, reconnaître une règle de dérivation permettant de déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I :

a) $f(x) = x^2(x^3-1)^5$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$; $I =]2 ; +\infty[$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

f) $f(x) = e^{3x}$; $I = \mathbb{R}$.

Exercice ❾

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2e^x + \dfrac{3}{x} - 5x$.

Déterminer la primitive de f qui prend la valeur $2e$ en 1.