ORTHOGONALITÉ ET DISTANCES DANS L'ESPACE

Objectifs :

- *Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.*
- *Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.*
- *Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.*
- *Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).*

1. Produit scalaire dans l'espace

Définition 1. ***Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace***

Le produit scalaire dans l'espace se définit de la même façon que dans le plan. Les trois définitions suivantes sont équivalentes et la deuxième demande un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

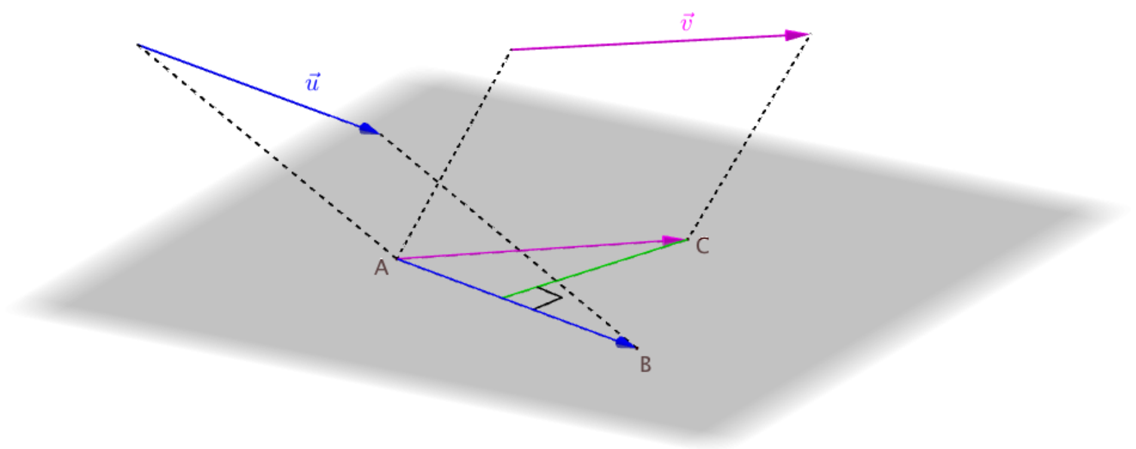
On appelle produit scalaire de deux vecteurs, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **tel que :**

- Expression à l'aide des normes :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|........\|^2-\|......\|^2-\|......\|^2\right) \text{ ou } \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|......\|^2+\|......\|^2-\|........\|^2\right)$$

- Expression à l'aide du cosinus :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=......\times......\times\cos(......)=......\times......\times\cos(.........)$$

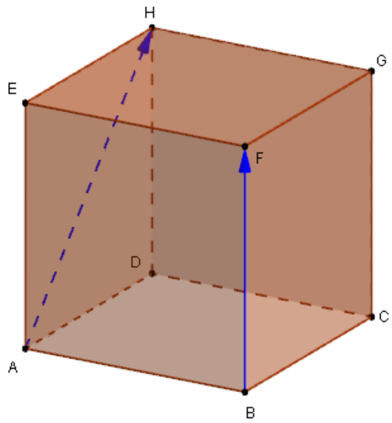


Remarque : La deuxième formule des normes peut se traduire également par
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Exemple : *ABCDEFGH* est un cube d'arête a.

$\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$. Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{AH} = ... \bullet ...... = ... \times ...... \times ....$.

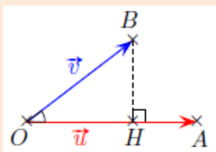
Donc $\vec{u} \bullet \vec{v} = ... \times ...... \times ...... = ...$



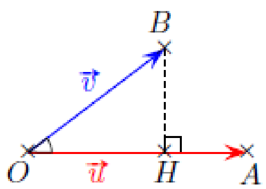
Propriété 1. ***Produit scalaire et projeté orthogonal***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soit *H* le projeté orthogonal du point *B* sur la droite (OA).

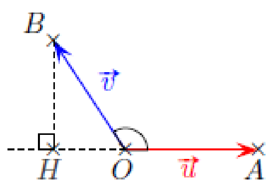
Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = ... \bullet ......$.



Remarque :



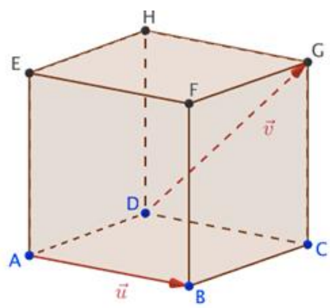
$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = ... \times ......$



$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = ... \times ......$

Exercice ❶

ABCDEFGH est un cube d'arête a.
Calculer $\vec{u} \bullet \vec{v}$.



corrigé en vidéo

Propriétés 2. ***Translation***

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace, et k un réel, on a :

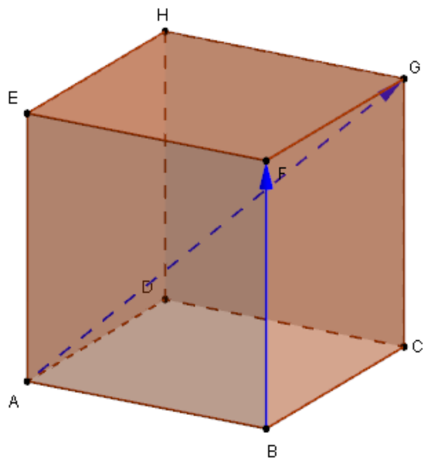
- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$.
- **Linéarité** : $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots + \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$, $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots + \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$,

$\left(k\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\left(\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\right)$ et $\vec{u} \cdot \left(k\vec{v}\right) = \ldots\ldots\left(\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\right)$.

- **carré scalaire** : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$
- **vecteurs orthogonaux** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont orthogonaux si, et seulement si,** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots$.

Exercice ❷

ABCDEFGH est un cube d'arête a.
Calculer $\overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{AG}$.



Propriété 3. ***« Identités remarquables »***

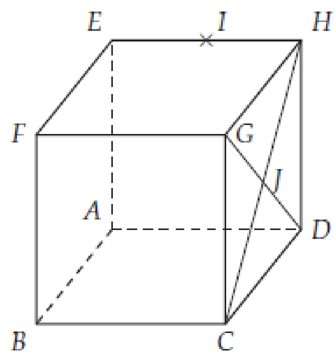
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots + \ldots\ldots$ **et**

$\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2 == \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots + \ldots\ldots$

Exercice ❸

ABCDEFGH est un cube d'arête a.
Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face *CDHG*.
Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{FH}$; $\overrightarrow{EH} \bullet \overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{EH} \bullet \overrightarrow{FC}$;
$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HC} \bullet \overrightarrow{GD}$.



Propriété 4. ***Produit scalaire dans un repère orthonormé de l'espace***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace de coordonnées respectives $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ dans un repère orthonormal quelconque.

$\vec{u}\cdot\vec{v} =$ ....

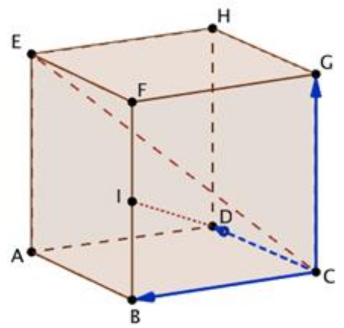
De ce fait, on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} =$ ....

Exercice ❹

On considère le repère $\left(C\ ;\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CG}\right)$.

I est le milieu de $[BF]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?



corrigé en vidéo

Exercice ❺

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 2\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Calculer : $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et θ.

Exercice ❻

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ a\\ 3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5a\\ 2a\\ -1\end{pmatrix}$.

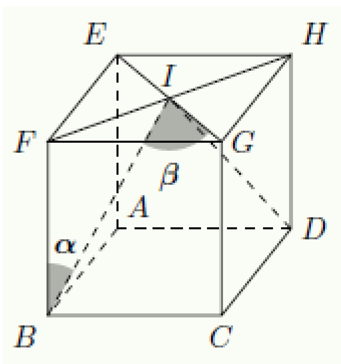
Déterminer les valeurs réelles de a pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Exercice ❺

Soit *ABCDEFGH*, un cube et I le centre de la face *EFGH*.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

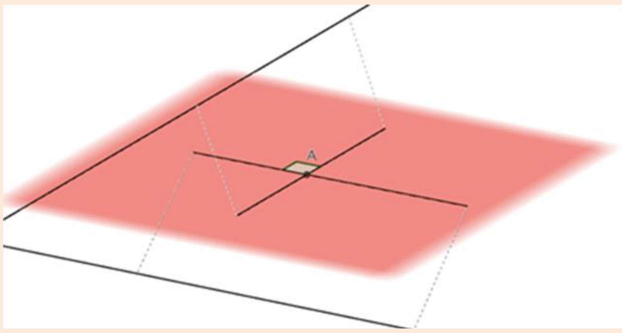
1) $\alpha = IBF$;
2) $\beta = BID$



2. Orthogonalité dans l'espace

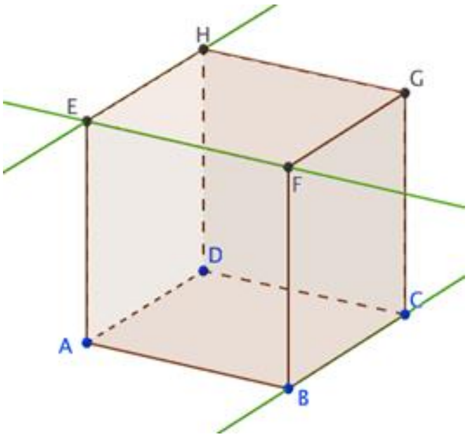
Définition 2. *Droites orthogonales*

Deux droites de l'espace sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.



Exemple :

Les droites (EF) et (EH) sont coplanaires et perpendiculaires ; elles sont donc orthogonales.
Les droites (EA) et (DC) sont orthogonales. En effet, la parallèle à (DC) passant par A (c'est-à-dire (AB)) est perpendiculaire à (EA).



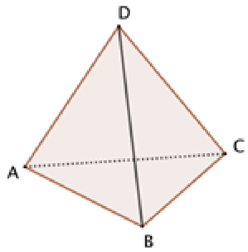
Remarques : Il ne faut pas confondre « perpendiculaires » et « orthogonales » :
- deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes
- deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et par conséquent, pas nécessairement sécantes.
- deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.

Propriété 5. *Droites orthogonales*

⬩ Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

⬩ Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Exercice ❻



Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur ℓ.
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

corrigé en vidéo

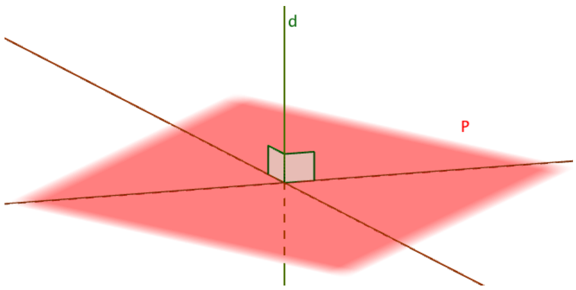
Définition 3. *Droite orthogonale à un plan*

**Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à …………………
………………………………..**

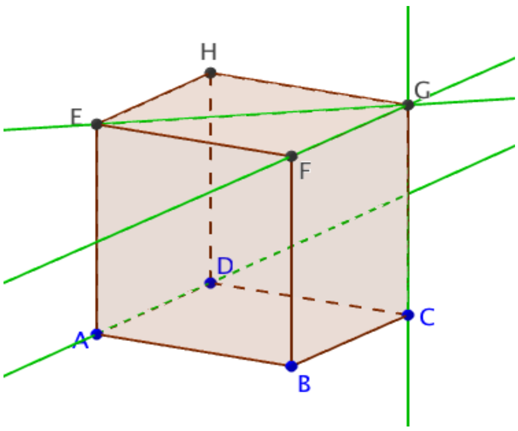
animation GeoGebra

Propriété 6. *Caractérisation d'un plan*

**Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à
……………………………………………………………………**



Exemple : Soit ABCDEFGH un cube.



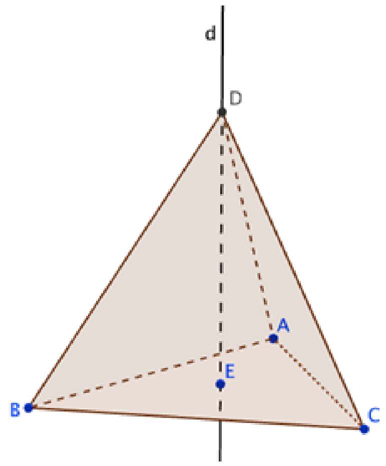
Les droites (GF) et (GH) sont perpendiculaires et coplanaires.

La droite (GC) est perpendiculaire aux droites (GF) et (GH)

Donc la droite (GC) est …………………
……………………………………….

Exercice ❼

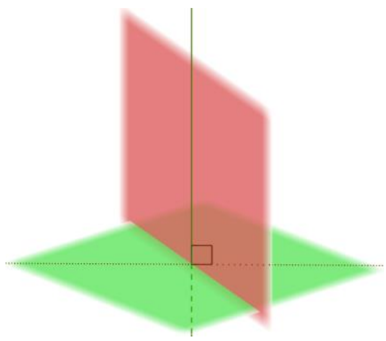
ABC est un triangle équilatéral.
E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite $\mathscr{D}$ passant par *E* est orthogonale au plan (ABC)
La pyramide *ABCD* est telle que *D* soit un point de la droite $\mathscr{D}$.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



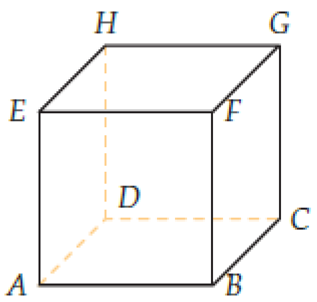
corrigé en vidéo

Définition 4. *Plans perpendiculaires*

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite ……………………………………………………..



Exercice ❽
ABCDEFGH est un cube.



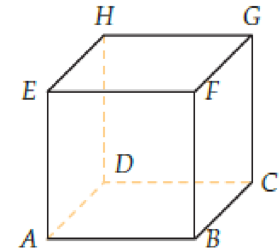
1) a) Citer six droites orthogonales à la droite (EA) ;
   b) Citer six droites orthogonales à la droite (EB) ;
   c) Citer deux droites orthogonales au plan (BCG) ;
   d) Citer deux droites orthogonales au plan (AFG).
2) a) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).
   b) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.
3) Les droites suivantes sont-elles orthogonales ?
Le démontrer.
   a) (EG) et (GC) ; b) (AC) et (HF) ; c) (EB) et (EG) ;
   d) (BD) et (EC) ; e) (AF) et (BC) ; f) (CE) et (AG).

3. Vecteur normal à un plan

Définition 5. *Vecteur normal à un plan*

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est ....

Exemple :

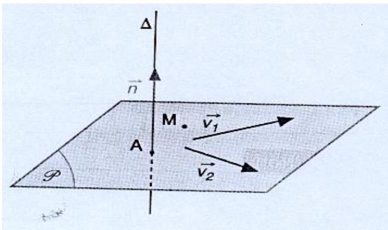


Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, la droite (EF) est orthogonale aux droites (FG) et (FB) ; le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est donc normal au plan ……….

De même, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est normal au plan ………, le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est normal au plan ………..

Propriété 7. *Vecteur normal à un plan*

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à ....

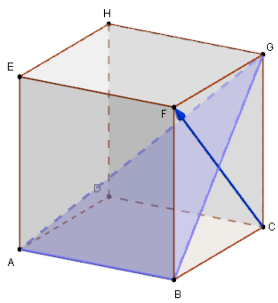


Au XIXe siècle, le vecteur normal $\vec{n}$, appelé produit vectoriel, est noté $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, [Hermann Günther Grassmann](#) (1809 ; 1877).

Remarques : • Un plan admet une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.
• Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\vec{n}$ ne sont pas coplanaires ; ils déterminent une base de l'espace.

Exercice ❾

$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).



corrigé en vidéo

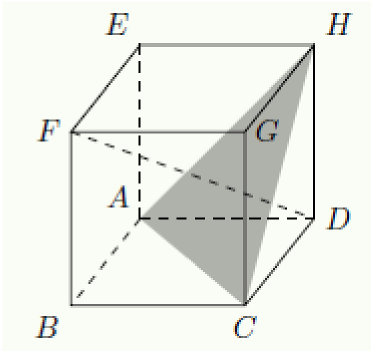
Exercice ⑩

Dans un repère orthonormé, A a pour coordonnées $(1;2;-2)$, B a pour coordonnées $(-1;3;1)$ et C a pour coordonnées $(2;0;-2)$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .

corrigé en vidéo

Exercice ❶❶



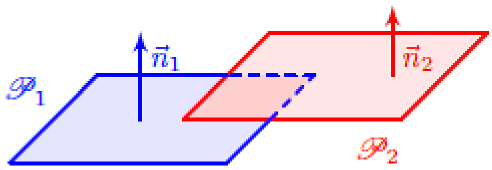
ABCDEFGH est un cube.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$

Démontrer que (FD) est orthogonale au plan (ACH).

Propriété 8. ***Plans parallèles***

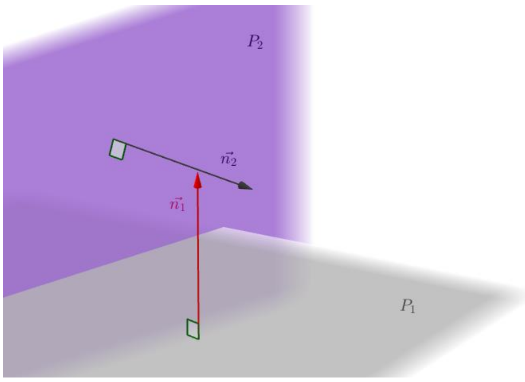
Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est ……………………………………………………………..



Propriété 9. ***Plans perpendiculaires***

Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un …………………

…………………………………………………………………………………………………..

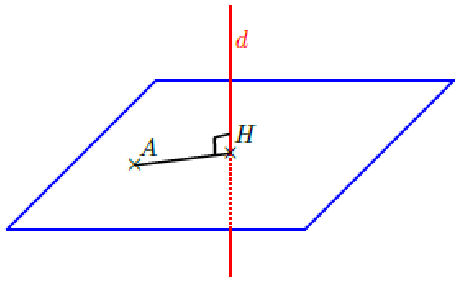


4. Projection orthogonale

Définition 6. ***Projeté orthogonal d'un point sur une droite***

Soient un point *A* et une droite $\mathscr{D}$ de l'espace.
La projection orthogonale de *A* sur $\mathscr{D}$ est le point *H* ……………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

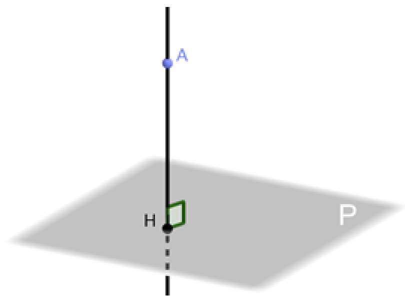


Exercice ❶❷
Soient les points $A(0\,;-1\,;3)$ et $(-1\,;2\,;5)$.
1) Montrer que le point $H(1\,;-4\,;1)$ est le projeté orthogonal du point $C(5\,;-2\,;0)$ sur la droite (AB).
2) En déduire la distance du point C à la droite (AB).

Définition 7. ***Projeté orthogonal d'un point sur un plan***

Soit un point *A* et un plan $\mathscr{P}$ de l'espace.
La projection orthogonale de *A* sur $\mathscr{P}$ est le point *H* appartenant à $\mathscr{P}$ ………

…………………………………………………………………………………………….

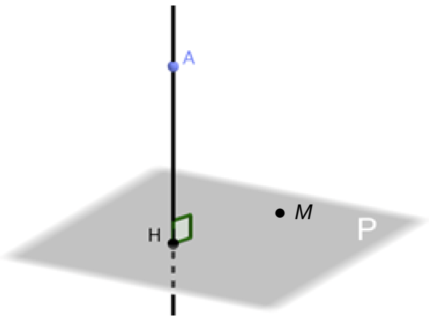


Propriété 10. ***Distance entre un point et un plan***

Le projeté orthogonal *H* d'un point *A* sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ …………….

………………… du point *A*. La longueur *AH* est la distance du point *A* au plan $\mathscr{P}$.

<u>*Démonstration*</u> : Supposons que A ne soit pas sur le plan $\mathscr{P}$, et considérons un point M de $\mathscr{P}$, distinct de H.
Les points A, H et M engendrent un plan.
Or, (AH) est orthogonale à $\mathscr{P}$, donc (AH) est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, par exemple (HM).
Par suite, le triangle AHM est rectangle en H ; on déduit du théorème de Pythagore que $AM > AH$.

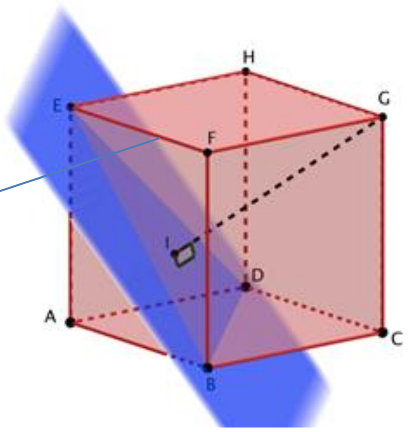


[démonstration en vidéo]

Exercice ❶❸

$ABCDEFGH$ est un cube.
Calculer la distance du point G au plan (BDE).

[corrigé en vidéo]

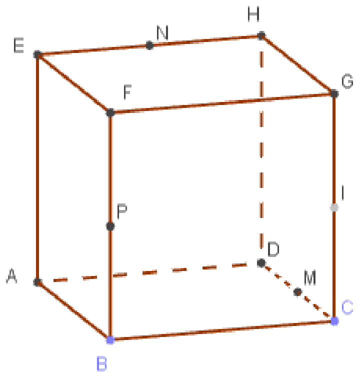


Exercice ❶❹
L'espace est muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(2 ; 3 ; 3)$, $B(-1 ; 17 ; -17)$; 17;−17) et le vecteur $\vec{n}(2 ; 3 ; -4)$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
1) Démontrer que le point $H(-9 ; 5 ; -1)$ appartient à $\mathscr{P}$.
2) a) Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$.
   b) En déduire la distance du point B au plan $\mathscr{P}$.
3) Soit $C(5 ; 11 ; -5)$.
   a) Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
   b) Calculer la distance du point H à la droite (BC).

Exercice ❶❺
Dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est constitué des points équidistants des extrémités de ce segment. Il s'agit du plan passant par le milieu du segment et orthogonal à ce segment.

Soit le cube $ABCDEFGH$.

1) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.
2) Démontrer que (DF) est perpendiculaire à (BEG).
3) (BEG) est-il le plan médiateur de $[DF]$?
4) Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et G.



Exercice ❶❻

Dans un cube *ABCDEFGH* de côté 1, on considère les points *M*, *N* et *P* centres respectifs des faces *EFGH*, *BCGF* et *ABFE*.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DF}\bullet\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{DF}\bullet\overrightarrow{NP}$.

2) Montrer que (DF) est perpendiculaire à (MNP).

3) Soit *T* le point d'intersection de (DF) et (MNP).

Montrer que *T* est le projeté orthogonal de *N* sur (DF).

4) En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DF}\bullet\overrightarrow{DN}$, déterminer le distance du point *D* au plan (MNP).

5) On note I le milieu de $[PN]$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux.

b) En déduire l'aire du triangle *MNP*.

6) En déduire le volume du tétraèdre *DMNP*.