SUCCESSIONS D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES, SCHÉMA DE BERNOULLI

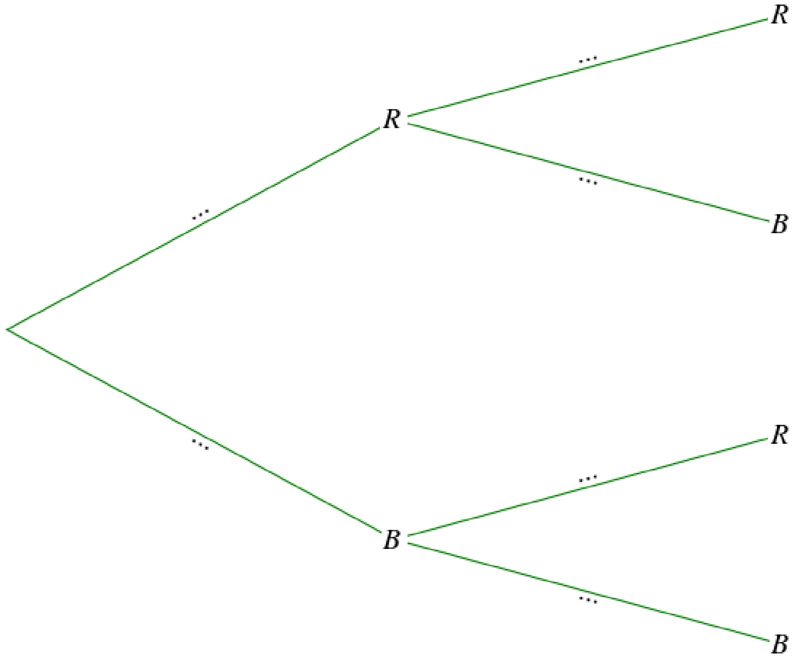
Objectifs :

• Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
• Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
• Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
• Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à 1 - α.

1. Succession d'épreuves indépendantes

Activité ❶

Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement
Avec remise deux boules de l'urne. On note les événements :
• *B* : « La boule tirée est bleue ».
• *R* : « La boule tirée est rouge ».
Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



Le résultat du deuxième tirage n'est pas conditionné par le résultat du premier : on dit que les deux tirages sont indépendants.

Définition 1. ***Expériences indépendantes***

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Déterminer les probabilités suivantes : $p(R,R)$, $p(B,B)$, $p(R,B)$ et $p(B,R)$.
Que constate-t-on ?

On considère n épreuves successives indépendantes E_1, E_2, ... , En.
L'univers E de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le produit cartésien : $E_1 \times E_2 \times ... \times En$.
Les issues de E sont les n−uplets $(x_1 ; x_2 ; ...; x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout i entier naturel avec $1 \leq i \leq n$.

Propriété 1. ***Succession d'épreuves indépendantes***

Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1 ; x_2 ; ...; x_n)$ est égale au produit des probabilités des issues de ses composantes x_1, x_2, ..., x_n.

Exemple : On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.
La probabilité d'obtenir la suite d'issues (*A* ; *B* ; *A* ; *C*) est : $p(A,B,A,C) = ... \times ... \times ... \times ... = ...$

2. Épreuve de Bernoulli – Loi de Bernoulli

Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 - 1705) est un mathématicien et physicien suisse.
Il fut un des premiers à comprendre et à appliquer le calcul différentiel et intégral, proposé par Leibniz, découvrit les propriétés des nombres dits depuis *nombres de Bernoulli* et donna la solution de problèmes regardés jusque-là comme insolubles.
Dans *Ars Conjectandi* (1713), Jacques Bernoulli considère le problème de calcul, connaissant le nombre de cailloux tirés d'une urne, de la proportion des différents cailloux colorés de l'urne. Ce problème est connu comme le problème de probabilité inverse, et a été un sujet de recherche au XVIIIe siècle qui a attiré l'attention de Abraham de Moivre et de Thomas Bayes.

Définition 2. ***Épreuve de Bernoulli***

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; on nomme l'une de ces issues « succès », que l'on note S, et l'autre « échec », que l'on note $\overline{S}$.

Exemple : On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Définition 3. ***Loi de Bernoulli***

Soit p un nombre réel de $[0\,;1]$. On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

- **X prend pour seules valeurs 1 (« succès ») et 0 (« échec ») ;**
- **$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.**

Exemple : Reprenons l'exemple du dé précédent.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$	$\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Propriété 2. ***Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$E(X)=p$ et $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$.

Démonstrations : $E(X)=1\times P(X=1)+0\times P(X=0)=1\times p+0\times(1-p)=p$.

$$V(X)=(1-E(X))^2\times P(X=1)+(0-E(X))^2\times P(X=0)=(1-p)^2\times p+(0-p)^2\times(1-p)$$
$$=(1-2p+p^2)\times p+p^2\times(1-p)=p-2p^2+p^3+p^2-p^3=p-p^2=p(1-p)$$

Par suite, $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$.

3. Schéma de Bernoulli. Loi binomiale

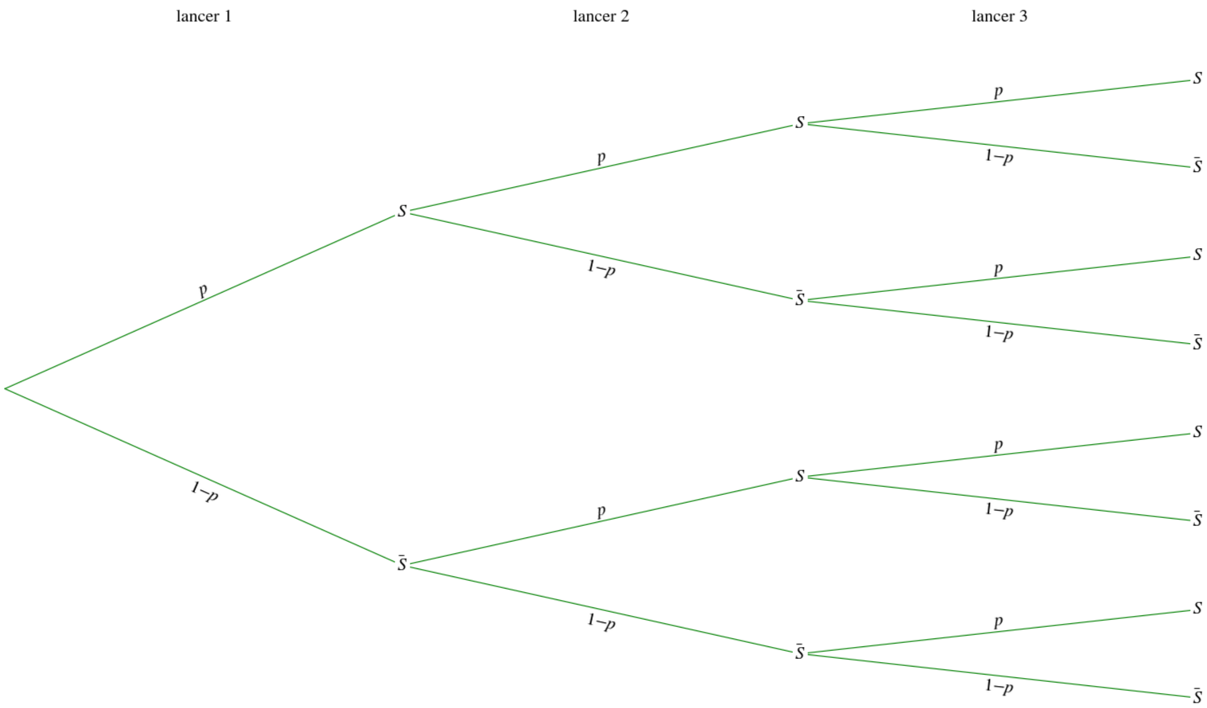
Définition 4. **Schéma de Bernoulli**

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p toute expérience aléatoire qui consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli (de paramètre p) identiques et indépendantes.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

En effet, on répète trois fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$, égale à la probabilité d'obtention du chiffre 6 lors d'un lancer du dé.



On obtient par exemple : $p(S,S,S) = p^3 = \left(\dfrac{......}{......}\right)^3 = \dfrac{......}{......}$

On remarque qu'il y a trois chemins conduisant à deux succès, c'est-à-dire aux issues $(S,S,\overline{S})$, $(S,\overline{S},S)$ et $(\overline{S},S,S)$. Par symétrie, il y a aussi trois chemins menant à deux échecs, c'est-à-dire aux issues $(S,\overline{S},\overline{S})$, $(\overline{S},\overline{S},S)$ et $(\overline{S},S,\overline{S})$.

On peut ainsi formuler qu'il y a autant de chemins conduisant à k succès qu'à k échecs, où k est un entier compris entre 0 et 3.

[calculer une probabilité à l'aide d'un arbre]

Exercice ❶

On tire 3 fois de suite une carte avec remise dans un jeu de 4 cartes (dont une représente le poisson Nemo). On considère comme succès « Obtenir le poisson Nemo ».
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Calculer la probabilité $P(X = 2)$.

[corrigé en vidéo]

Propriété 4. ***Coefficient binomial***

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p.
Soit k un entier naturel tel que $0 \le k \le n$.
Il y a $\binom{n}{k}$ chemins conduisant à k succès pour n répétitions sur l'arbre probabiliste représentant le schéma de Bernoulli.

Définition 6. ***Loi binomiale***

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p.
Soit k un entier naturel tel que $0 \le k \le n$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre total de succès.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent de ce paragraphe.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers. Alors X suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}\left(3\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.

Propriété 5. ***Calculer une probabilité avec une loi binomiale***

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Si X suit une loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \le k \le n$, la probabilité que X soit égale à k est :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Démonstration : On sait que tous les chemins comportant k succès sont équiprobables car, en faisant le produit des probabilités des n issues de chaque épreuve de Bernoulli, on obtient k facteurs égaux à p (ce sont les k succès) et $n-k$ facteurs égaux à $1-p$ (les $n-k$ échecs). Leur probabilité est donc égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.

De plus, il y a $\binom{n}{k}$ chemins menant à k succès. Par conséquent, $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Exemple : Reprenons l'exemple du **3.**. La probabilité d'obtenir deux chiffres 6 sur les trois lancers est égale à $p(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$.

Exercice ❷
Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.
1) Prouver que X suit une loi binomiale.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

corrigé en vidéo

Propriété 6. ***Espérance et écart-type d'une loi binomiale***

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Si X suit une loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$, alors $E(X)=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Exemple : Reprenons l'exemple du **3.**.
$E(X)=np=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$; $V(X)=np(1-p)=3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{12}}\approx 0{,}65$.

Remarque : On peut remarquer que la formule de l'espérance peut s'expliquer sans calcul. En effet, chaque épreuve de Bernoulli a une espérance de succès égale à p donc, en la répétant n fois, on peut espérer obtenir en moyenne $n\times p$ succès.

Méthode pour calculer l'espérance mathématique d'une loi binomiale

méthode en vidéo

Méthode pour calculer l'espérance mathématique d'une loi binomiale

méthode en vidéo

Exercice ❸
Un QCM comporte 8 questions. À chaque question, 3 solutions sont proposées ; une seule est exacte. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.
1) Quelle note peut-on espérer obtenir en répondant au hasard ?

corrigé en vidéo

2) Calculer la variance et l'écart-type de X.

corrigé en vidéo

Exercice ❹
Une expérience aléatoire consiste à lancer cinq fois un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Un lancer est gagnant si le 4 est sur la face cachée.
On appelle G la variable aléatoire qui associe à chaque issue de l'expérience le nombre de lancers gagnants.

1) Montrer que G suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Déterminer la probabilité d'obtenir un seul lancer gagnant.
3) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité de G.

Exercice ❺
Une entreprise produit des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise, 8 stylos.

1) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de stylos présentant un défaut.
Quelle est la loi suivie par X ?
2) Calculer la probabilité des événements suivants (arrondir les résultats au millième) :
   a) A : « Il y a exactement deux stylos avec un défaut »
   b) B : « Il y a au moins un stylo avec un défaut ».
3) Quel nombre de stylos présentant en moyenne un défaut, l'entreprise peut-elle espérer obtenir ?

Méthode pour calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide de la calculatrice T.I.

[méthode en vidéo]

Exercice ❻
On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité $P(X=5)$.
c) Calculer la probabilité $P(X\leq 5)$.
d) Calculer la probabilité $P(X\geq 3)$.

Exercice ❼
Y suit une loi binomiale avec $P(Y\leq 15)=0{,}65$ et $P(Y\leq 19)=0{,}875$.
Déterminer $P(Y\geq 15)$ et $P(15\leq Y\leq 19)$.

Exercice ❽
Liam joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.
Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur.
On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
b) Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ? Arrondir à 10^{-4} près.
c) Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ? Arrondir à 10^{-4} près.
d) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins deux parties ? Arrondir à 10^{-4} près.

Exercice ❾

Les 13 lettres du mot « MATHEMATIQUES » sont mises dans un sac opaque. On tire successivement, au hasard et avec remise trois lettres du sac. On compte le nombre de consonnes piochées.

1) Justifier que cette situation est modélisée par un schéma de Bernoulli, puis représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2) Déterminer les probabilités :
   a) de ne piocher aucune consonne ; au moins une consonne.
   b) de piocher exactement 2 voyelles parmi les 3 lettres piochées.

Exercice ❿

37 % des pratiquants d'une salle de remise en forme restent plus de deux heures dans l'établissement.
Pour 20 personnes qui arrivent dans la salle la première heure, la variable aléatoire X dénombre ceux qui resteront plus de deux heures.

1) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) La loi de X est représentée dans le tableau ci-contre.
   a) Lire dans le tableau $P(X=9)$.
   Interpréter ce résultat.
   b) Lire dans le tableau $P(X \leq 6)$.
   Interpréter ce résultat.
   c) Lire dans le tableau $P(4 \leq X \leq 9)$.
   Interpréter ce résultat.
   d) Déterminer la plus grande valeur k_1 telle que $P(X \leq k_1) \leq 0{,}025$.
   Interpréter ce résultat.
   e) Déterminer la plus petite valeur k_2 telle que $P(X \leq k_2) \geq 0{,}975$.
   Interpréter ce résultat.
   f) Déduire des deux questions précédentes deux nombres entiers a et b telle que $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$.
   Interpréter ce résultat.

Valeurs k	$P(X=k)$	$P(X \leqslant k)$
0	$9,7 \times 10^{-5}$	$9,7 \times 10^{-5}$
1	$0,001139$	$0,001236$
2	$0,006358$	$0,007594$
3	$0,022403$	$0,029997$
4	$0,055918$	$0,085914$
5	$0,10509$	$0,191004$
6	$0,154299$	$0,345303$
7	$0,18124$	$0,526542$
8	$0,172969$	$0,699511$
9	$0,135446$	$0,834957$
10	$0,087503$	$0,92246$
11	$0,046719$	$0,969179$
12	$0,020578$	$0,989757$
13	$0,007437$	$0,997194$
14	$0,002184$	$0,999378$
15	$0,000513$	$0,999891$
16	$9,42 \times 10^{-5}$	$0,999986$
17	$1,3 \times 10^{-5}$	1
18	$1,27 \times 10^{-6}$	1
19	$7,87 \times 10^{-8}$	1
20	$2,31 \times 10^{-9}$	1