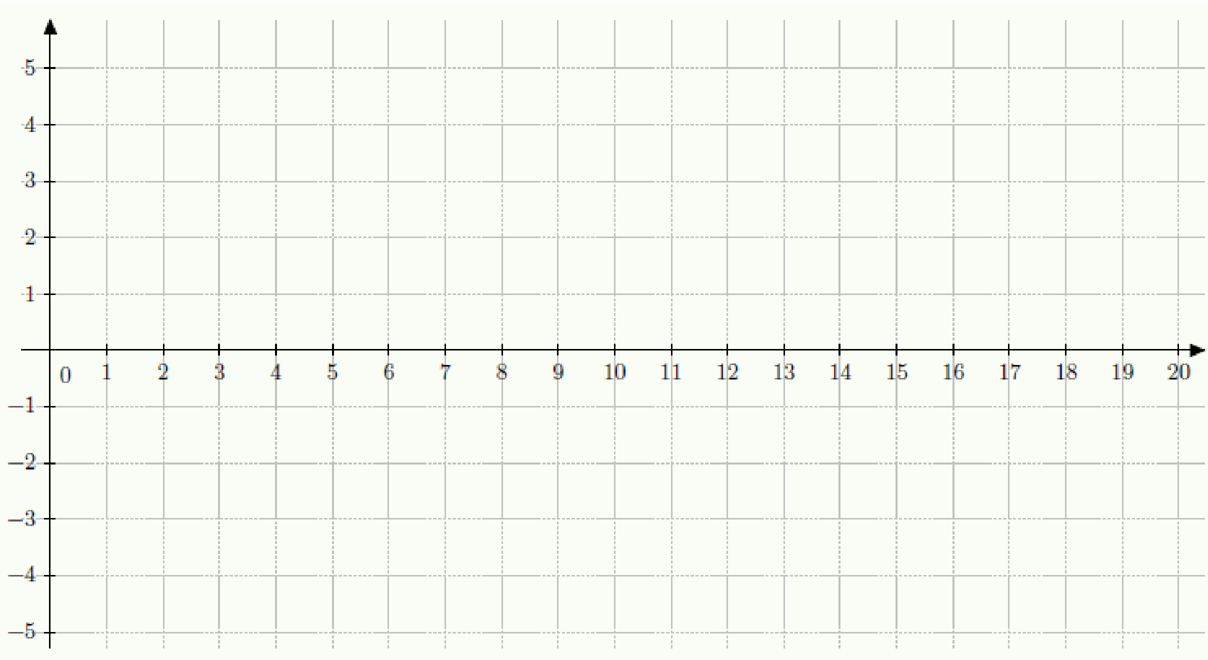
LIMITES DE SUITES

Objectifs :
- *Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers + ∞ ou – ∞.*
- *Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.*

1. Convergence ou divergence d'une suite

Soient la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0,6u_n - 1$, et la suite (v_n) définie par $v_n = 1,2^n - 5$.
A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement ces suites ci-dessous.



On s'intéresse au comportement à l'infini de ces suites, c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$.
D'après les graphiques précédents, on peut conjecturer que :

• Si on se fixe n'importe quel nombre α, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont sont compris entre ……… et ……….

On dit que la suite (u_n) a pour limite ……….

• Si on se fixe n'importe quel nombre A, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (v_n) sont supérieurs à ……….

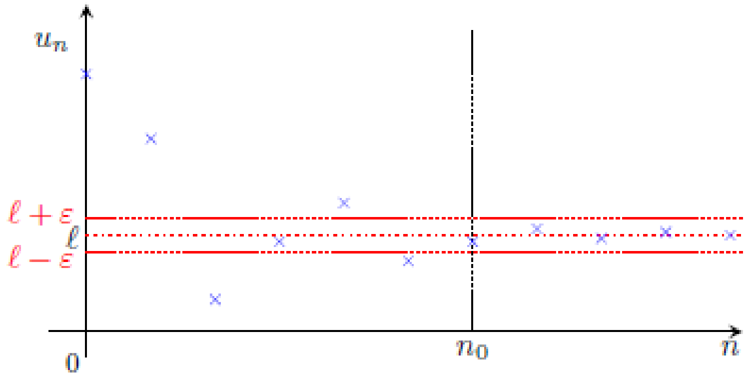
On dit que la suite (v_n) a pour limite ………

Définition 1. ***Suite convergente***

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel.

Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite ….., ou que la suite (u_n) converge vers …..

On écrira : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots\ldots$.



animation GeoGebra

Remarques : • Dire qu'une suite converge vers ℓ revient aussi à dire que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

• Dire qu'une suite converge vers ℓ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.

• Lorsqu'elle existe cette limite est unique.

Exemples : Les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, convergent vers ...

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.
Cette suite converge vers $\ell = 0{,}5$.
On veut connaître à partir de quel entier N la suite est dans l'intervalle ouvert centré en 0,5 et de rayon 10^{-3} .
Le programme ci-contre permet de trouver N, grâce à un "Tant que".

Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $0{,}1 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $|U - 0{,}5| \geqslant 10^{-3}$
  faire
    $2U(1-U) \to U$
    $N+1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N, $|U - 0{,}5|$

Définition 2. ***Suite divergente***

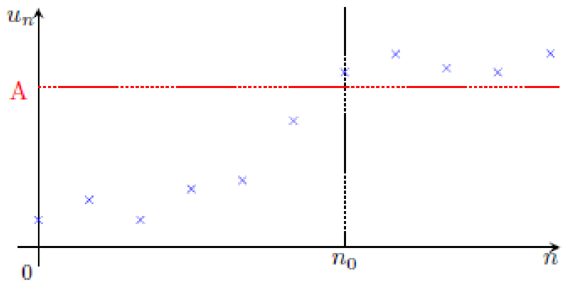
Soit (u_n) une suite.

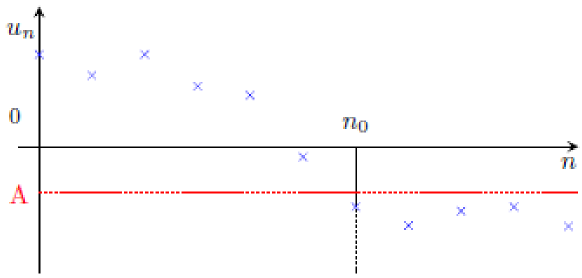
Si tout intervalle de la forme $]A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite …….

On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ………..

Si tout intervalle de la forme $]-\infty\ ;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ………





[animation GeoGebra]

Remarques : • Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que tout intervalle $]A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

• Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.

• Le mot de convergence n'est utilisé que dans le cas d'une limite finie.

• Une suite divergente peut avoir une limite infinie ou ne pas avoir de limite. Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=(-1)^n$ n'a pas de limite.

Exemples : Les suites définies sur **N** par : $u_n=n$, $v_n=n^2$ et $w_n=\sqrt{n}$, divergent vers ……

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=-2$ et $u_{n+1}=\frac{4}{3}u_n+1$.

On peut montrer que cette suite est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

On voudrait connaître à partir de quel entier N, u_n est supérieur à 10^3.

```
Variables : N : entier    U : réel
Entrées et initialisation
    −2 → U
    0 → N
Traitement
    tant que U ⩽ 10^3 faire
        4/3 U + 1 → U
        N + 1 → N
    fin
Sorties : Afficher N, U
```

Exercice ❶

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{2}{n}$.

Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $-0{,}02 < u_n < 0{,}02$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice ❷

En utilisant la définition du cours, démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

2. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$						F.I. *

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

<u>Exemples</u> : ● Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = ...$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + n) = ...$ (par somme de limites).

● Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n + 1 + \dfrac{2}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3n + 1) = ...$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n + 1 + \dfrac{2}{n}\right) = ...$ (par somme de limites).

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$									F.I.

<u>Exemple</u> : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = ...$ (par somme de limites)

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 3) = ...$ (par somme de limites)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = ...$ (par produit de limites)

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	0 avec $v_n<0$	0	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$							F.I.					F.I.

<u>Exemple</u> : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n^2+7}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \ldots\ldots$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+7\right) = \ldots\ldots$ (par somme de limites)

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-3) = \ldots\ldots$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n^2+7} = \ldots\ldots$ (par quotient de limites)

4) Méthodes pour lever une indétermination

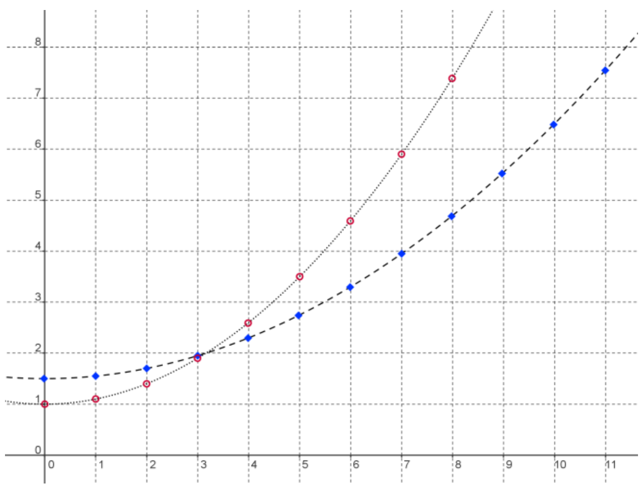
Exercice ❸

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2-n+2\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-6}{2n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

3. Théorèmes de comparaison

Théorème 1. *Théorème de comparaison*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur N.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots\ldots\ldots$.



Dans le dessin ci-contre, les termes de la suite (u_n) sont données par les abscisses des points ◆ et ceux de la suite (v_n) sont données par les abscisses des points ⭕

Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) qui est « au-dessus » à partir du rang 4 divergera obligatoirement vers $+\infty$.

Démonstration : Soit un nombre réel A.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

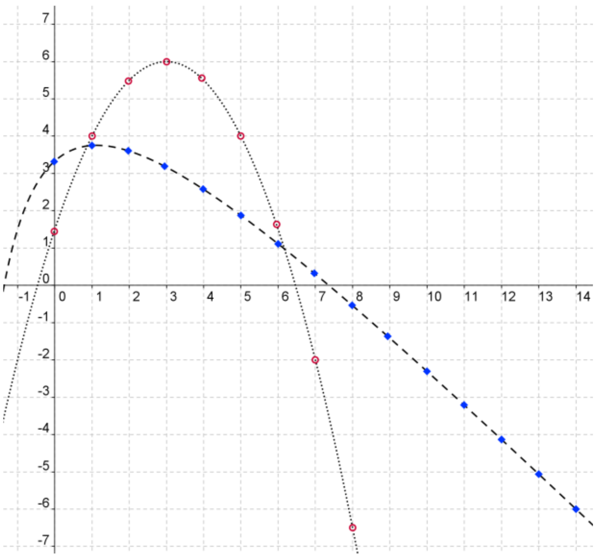
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

[démonstration en vidéo]

Théorème 2. ***Théorème de comparaison***

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur N.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ ……… .



Dans le dessin ci-contre, les termes de la suite (u_n) sont données par les abscisses des points ◆ et ceux de la suite (v_n) sont données par les abscisses des points ⭕

Si (u_n) diverge vers $-\infty$, alors (v_n) qui est « en dessous » à partir du rang 7 divergera obligatoirement vers $+\infty$.

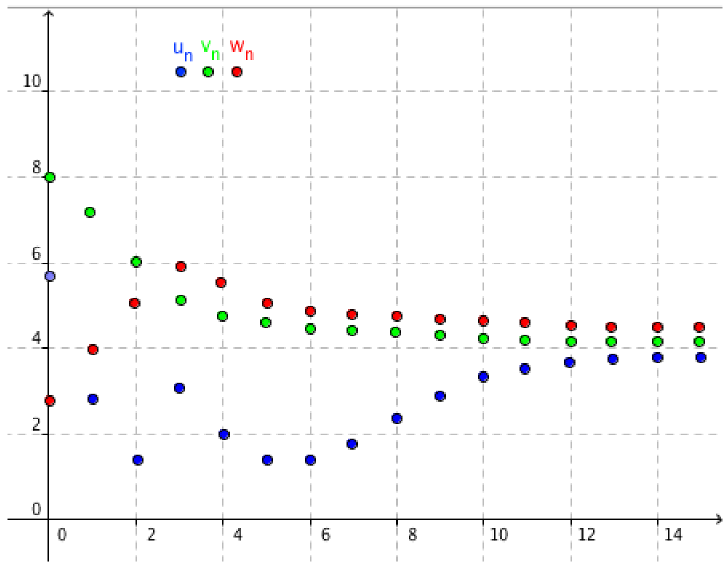
Exercice ❹
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + (-1)^n\right)$.

[corrigé en vidéo]

Exercice ❺
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n + \sin(n)\right)$.

Théorème 3. ***Théorème des gendarmes***

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur N.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ ………… .



animation GeoGebra

Exercice ❻

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$.

corrigé en vidéo

Exercice ❼

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n)}{n+1}$.

4. Limite d'une suite géométrique

Théorème 4. *Limite de q^n*

Soit un réel q strictement positif.

- **Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = ...$.**
- **Si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = ...$.**
- **Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = ...$.**
- **Si $q\leq -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.**

Démonstration dans le cas où $q>1$: D'après l'inégalité de Bernoulli :
pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

démonstration en vidéo

Exemple : Comme $0<\frac{1}{4}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\ldots\ldots$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}7\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\ldots\ldots$.

Exercice ❽

Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n}{3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

corrigés en vidéo

Exercice ❾

En 2020, Liam a planté 20 orchidées sous serre pour approvisionner son magasin. Chaque année, il estime que 25 % des orchidées existantes ne fleuriront plus.
Il décide de les éliminer et d'en planter 2 nouvelles chaque année.
Il voudrait savoir comment va évoluer, à long terme, le nombre d'orchidées sous la serre.
On note (u_n) le nombre d'orchidées l'année $2020+n$
Ainsi, $u_0=20$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,75u_n+2$.
2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-8$.
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 b) Exprimer v_n en fonction de n.
3) En déduire u_n en fonction de n.
4) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

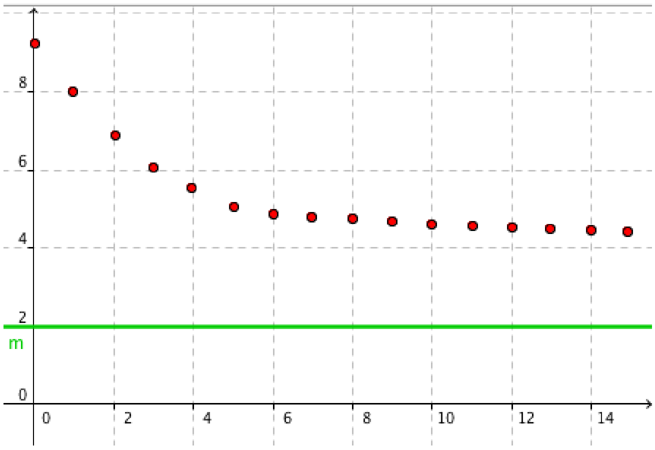
5. Théorèmes de convergence des suites monotones

Propriété 1. ***Suite croissante majorée ou suite décroissante minorée***

- Si une suite croissante est majorée alors elle est …………………………..

- Si une suite décroissante est minorée alors elle est …………………………..

Remarque : Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Exercice ⑩

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 3.

corrigé en vidéo

2) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

corrigé en vidéo

Propriété 2. ***Suite croissante non majorée ou suite décroissante non minorée***

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers ………...

- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers ………...

Démonstration de la première : Soit un réel A.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

démonstration en vidéo