LIMITES DE FONCTIONS

Objectifs :

• Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en ± ∞, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.

• Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

1. Limite d'une fonction en l'infini

Définition 1. ***Limite finie en*** $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$.

On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$.

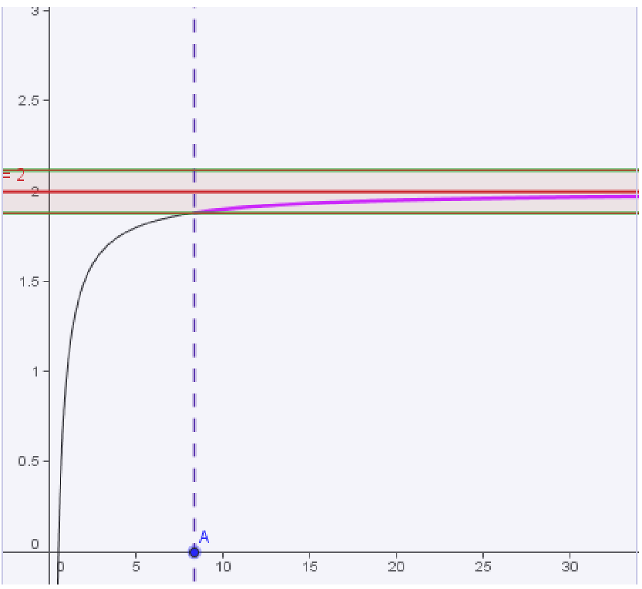
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une ………………………….. à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

[limite finie d'une fonction à l'infini]

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

Les valeurs $f(x)$ se resserrent autour de …… dès que x est suffisamment grand.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$.



D'où la droite d'équation ………….. est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Définition 2. ***Limite finie en*** $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,; B[$.

On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand en valeur absolue.

On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots$.

On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est une ………………………….. à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Propriété 1. Limites de fonctions de référence

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\ldots\ldots$ **pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=\ldots\ldots$ **pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\ldots\ldots$

Définition 3. ***Limite infinie en*** $+\infty$

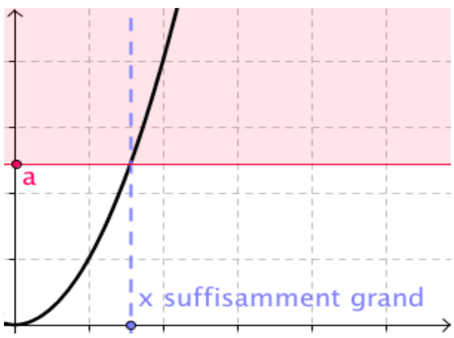
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$.

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$.

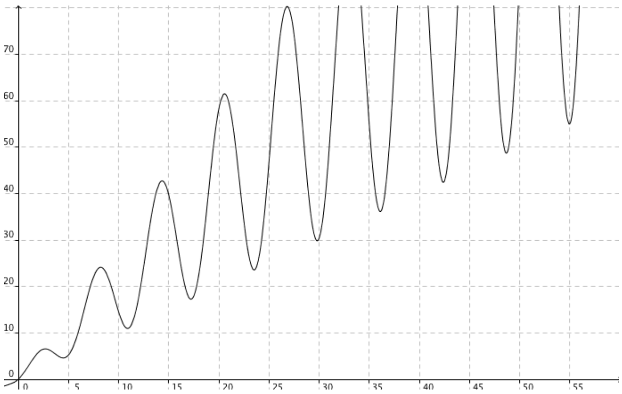
[limite infinie d'une fonction à l'infini]

Exemple : La fonction définie par $f(x)=x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi ………….. que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.



Remarques : ● On peut faire des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

● Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.



On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pourtant cette fonction n'est pas croissante.

● Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriété 2. Limites de fonctions de référence

Soit n un entier naturel non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = ...$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} ...... \text{ si } n \text{ est impair} \\ ...... \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax + b) = ...$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax + b) = ...$

Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax + b) = ...$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax + b) = ...$

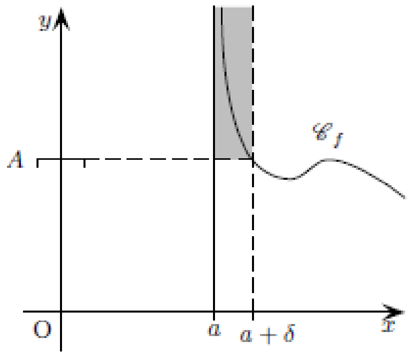
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = ...$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = ...$

2. Limite d'une fonction en un réel a

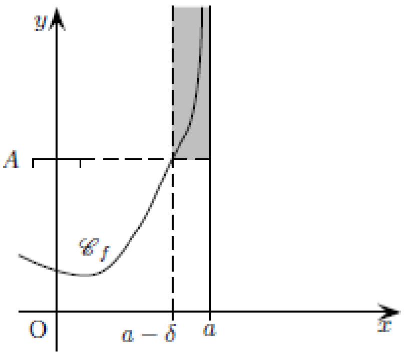
Définition 4. ***Limite infinie en un réel a***

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.
On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ...$.
On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une .... de $\mathscr{C}_f$.

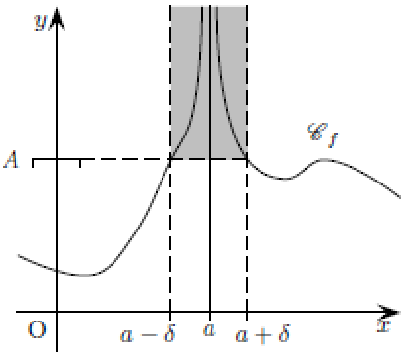
[limite d'une fonction en un réel a]



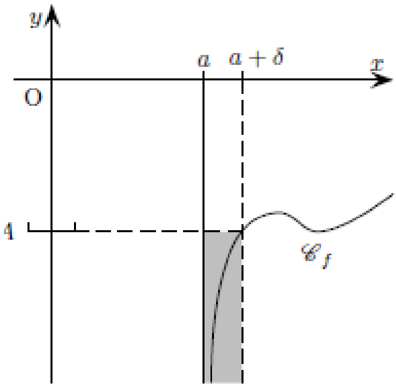
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$



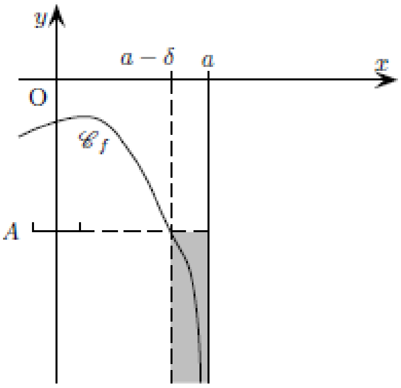
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$



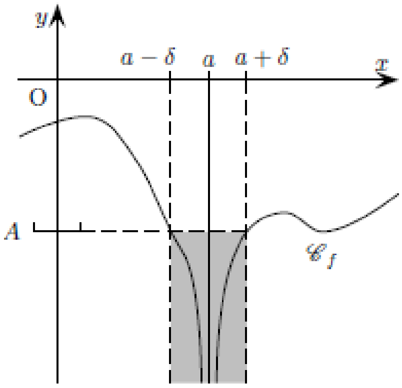
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

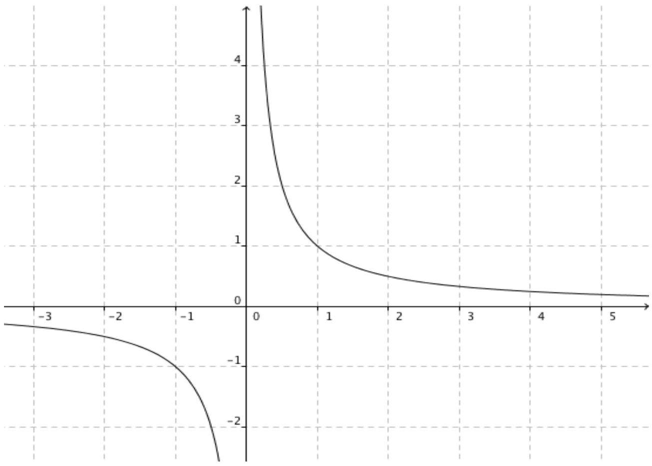


$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



On obtient :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = ...$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = ...$

On parle de ***limite à gauche*** de 0 et de ***limite à droite*** de 0.

Propriété 3. Limites de fonctions de référence

- **Soit n un entier naturel non nul : - si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = ...$**

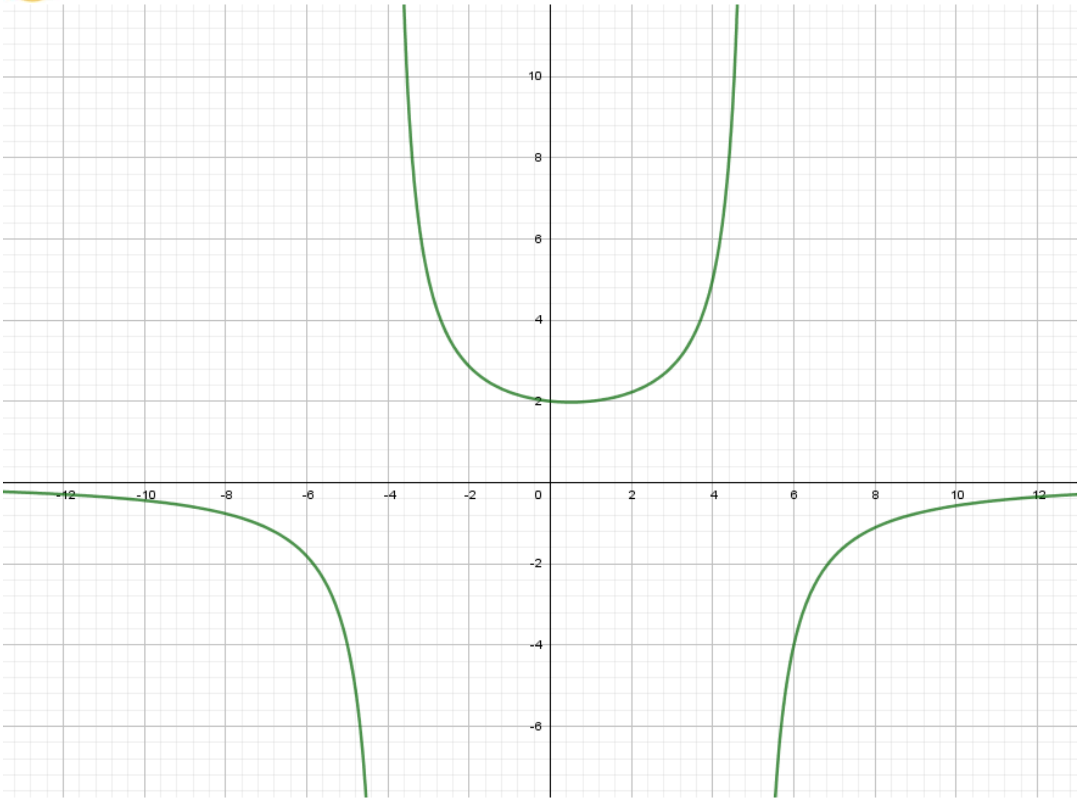
- si n est impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = ...$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = ...$

- **$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = ...$**

Exercice ❶ : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-4[\,\cup\,]-4\,;5[\,\cup\,]5\,;+\infty[$ et représentée graphiquement par la courbe ci-dessous.

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x>-4}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

corrigé en vidéo



3. Opérations sur les limites

Soit f et g admettant chacune une limite, finie ou non, quand x tend vers a.
Dans ces énoncés, a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$, mais ℓ et ℓ' sont des réels.
Lorsqu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure et qu'il faut utiliser d'autres démarches, on dit qu'on a une forme indéterminée, souvent notée **F.I.**
Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

1) Limite de la somme $f+g$ des fonctions f et g

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=$						

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

2) Limite du produit $f \times g$ des fonctions f et g

Il faut penser à appliquer la règle de signe d'un produit, qui s'applique aux limites « infinies ».

Si	$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors	$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \times g(x) \right) =$						

Si	$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	0
	$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors	$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \times g(x) \right) =$			

Exemples : *Déterminer* $\lim\limits_{x \to 0} (x+2)\sqrt{x}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1-x)$.

3) Limite du quotient $\frac{f}{g}$ des fonctions f et g

• **Cas où la limite de g n'est pas nulle** :

Si	$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
	$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors	$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) =$							

• **Cas où la limite de g est nulle** :

Si	$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
	$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors	$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) =$					

Remarque : « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a, en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x-2}{\sqrt{x}}$.

Exercice ❷ : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$.

Montrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

corrigé en vidéo

Exercice ❸ : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 4[\cup]4\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$.

Montrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

corrigé en vidéo

Exercice ❹ : Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\frac{1}{x}}{3+x}$

Exercice ❺ : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2+2x^2-6x+1\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{4x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$.

4. Limite d'une fonction composée

Propriété 4. ***Limite d'une fonction composée***

Soit f et g deux fonctions, et soient a, b et c qui désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots} f(x)=\ldots\ldots$ et si $\lim\limits_{X\to\ldots\ldots} g(X)=\ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots} g(f(x))=\ldots\ldots$.

Méthode pour déterminer la limite d'une fonction composée

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\ldots\ldots$ (par somme de limites).

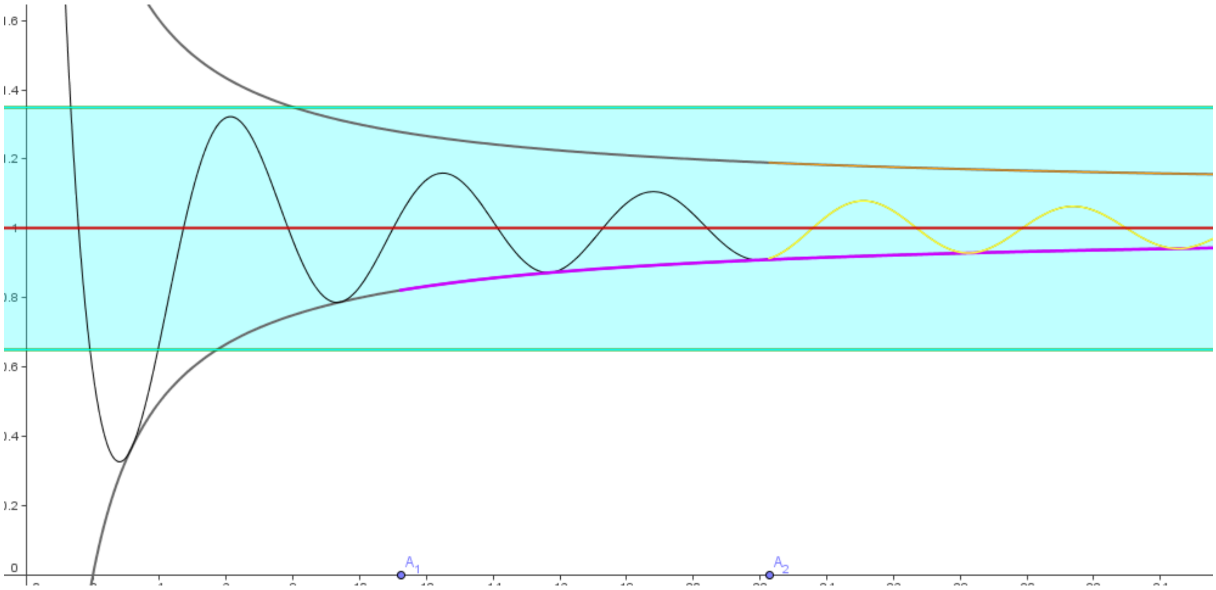
Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to\ldots\ldots} e^X=\ldots\ldots\ldots\ldots$.

méthode en vidéo

Exercice ❻ : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4x-1}{2x+3}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-1}$.

5. Théorèmes de comparaison



Une fonction f est « coincée » entre deux fonctions g et h qui tendent vers 1 en $+\infty$, alors f elle-même va tendre vers 1 en $+\infty$.

Théorème 1. ***Théorème des gendarmes***

Soient f, g et h des fonctions, et ℓ et A deux réels.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et si, pour tout réel x supérieur ou égal à A,

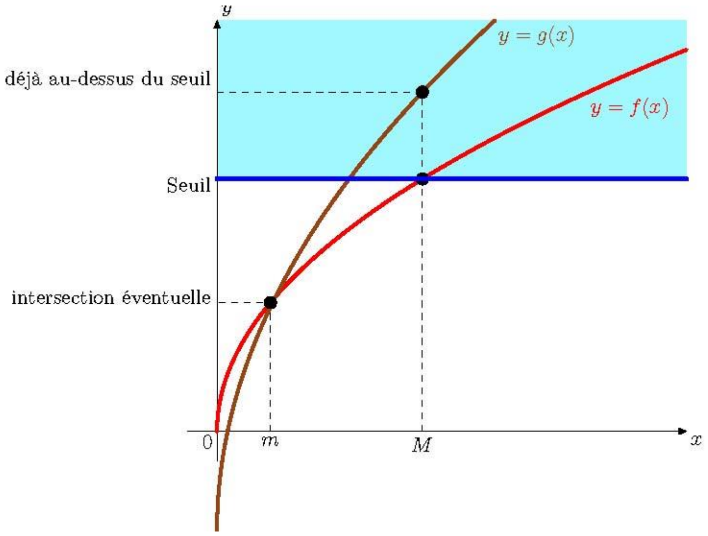
$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$.

Exercice ❼ : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

corrigé en vidéo

Exercice ❽ : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$.



Théorème 2. ***Théorème des comparaisons***

Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une borne de I.

Si pour tout x de I, on a : $g(x) \leq f(x)$, et :

- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots\ldots$.
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ldots\ldots$.

Exercice ❾ : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sin(x)\right)$.

corrigé en vidéo

Exercice ❿ : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \cos(x)\right)$.

6. Croissance comparée des fonctions exponentielle et puissances

Propriété 5. ***Croissances comparées***

Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \ldots\ldots$

On dit que la fonction exponentielle l'« **emporte** » sur la fonction puissance.

Démonstrations : • Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

On a déjà montré que pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, on a $e^x \geq x+1$; par suite, $e^x > x$.

Comme $f'(x) > 0$, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on en déduit que la fonction f est ....
sur $[0\,;+\infty[$.

De plus, $f(0) = \ldots\ldots$. Par conséquent, pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $f(x) \geq \ldots\ldots$, et par suite, $e^x \geq \ldots\ldots + \ldots\ldots$, ou encore $e^x > \ldots\ldots.$

Si x est un réel strictement positif, on peut en conclure que $\dfrac{e^x}{x} \geq \ldots\ldots$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ldots\ldots = \ldots\ldots$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots\ldots$.

On peut remarquer que $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, en appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$.

Comme n est positif, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$ (comme produit de n limites infinies).

démonstration en vidéo

Exercice ❶❶ : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x + x}{e^x - x^2}\right)$.

corrigé en vidéo

Exercice ❶❷ : Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2 + 4x + 1)e^x$.