

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Cours

Terminale Spé maths

Objectifs :

- Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique.
- Étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques.
- Résoudre une équation du type $\cos(x)=a$.
- Résoudre une inéquation du type $\cos(x)<a$.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dérivabilité et variations

Propriété 1. Dérivabilité

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

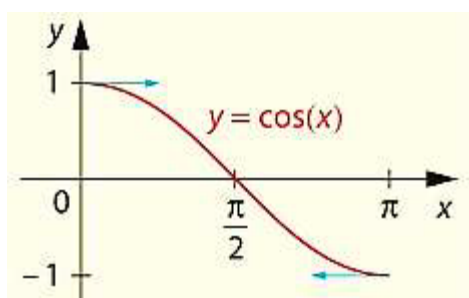
Étudions alors les variations des fonctions cosinus et sinus sur $[0 ; \pi]$.

♦ Sur $[0 ; \pi]$, $\sin(x)$0 ; par suite, pour tout x de $[0 ; \pi]$, $\cos'(x)$0 .

On en déduit que :

x	0	π
$\cos'(x)$		
cos		

On peut alors tracer la représentation graphique de la fonction cosinus sur $[0 ; \pi]$:

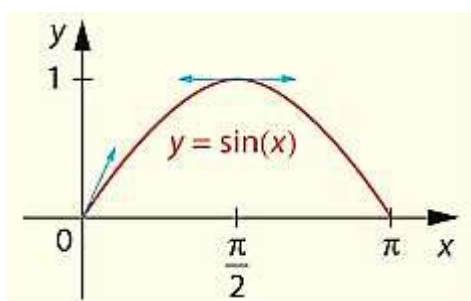


♦ Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \dots\dots 0$ et sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\cos(x) \dots\dots 0$; par suite, pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) \dots\dots 0$, et pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\sin'(x) \dots\dots 0$

On en déduit que :

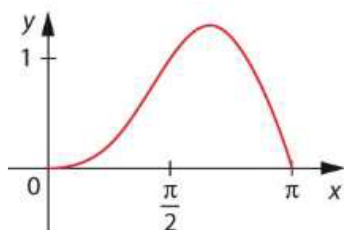
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x)$			
$\sin$			

On peut alors tracer la représentation graphique de la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$:



Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = (1 - \cos(x))\sin(x)$. Cette fonction est représentée ci-dessous :



- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Montrer que $f'(x) = (1 + 2\cos(x))(1 - \cos(x))$.
- 3) En déduire le sens de variation de f .

2. Parité

Rappel. Parité d'une fonction

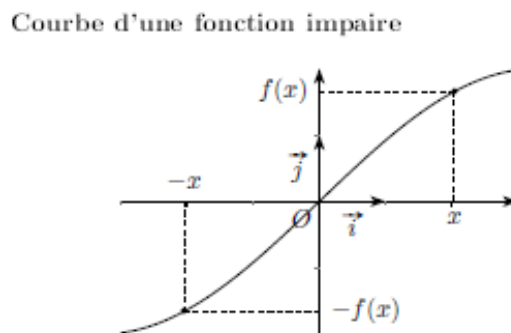
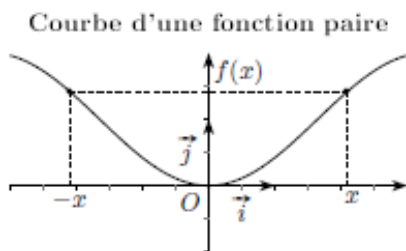
On dit qu'une fonction f est paire si pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$.

On dit qu'une fonction f est impaire si pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 2. Conséquences

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



On a vu dans le chapitre de trigonométrie que, pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. On en déduit que :

Propriété 3. Parité des fonctions cosinus et sinus

La fonction cosinus est paire.

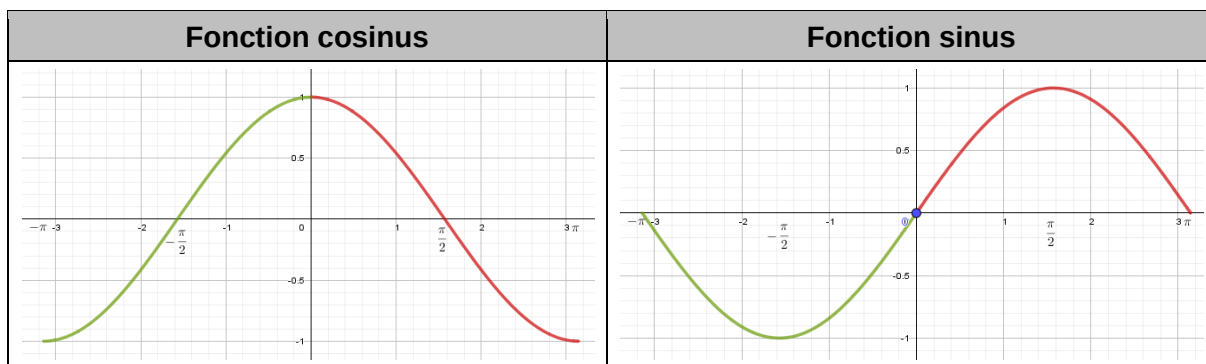
Sa représentation graphique de la fonction cosinus est symétrique par rapport à

.....

La fonction sinus est impaire.

La représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à

.....



Exercice 2

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ③

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est impaire.

Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

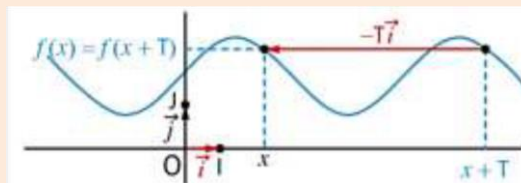
3. Périodicité

Définition 2. Périodicité d'une fonction

Une fonction f est dite T -périodique sur un intervalle I , si pour tout réel x de I , $f(x+T) = f(x)$.

Propriété 4. Périodicité et représentation graphique

Si f est T -périodique, alors sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $-T\vec{i}$.

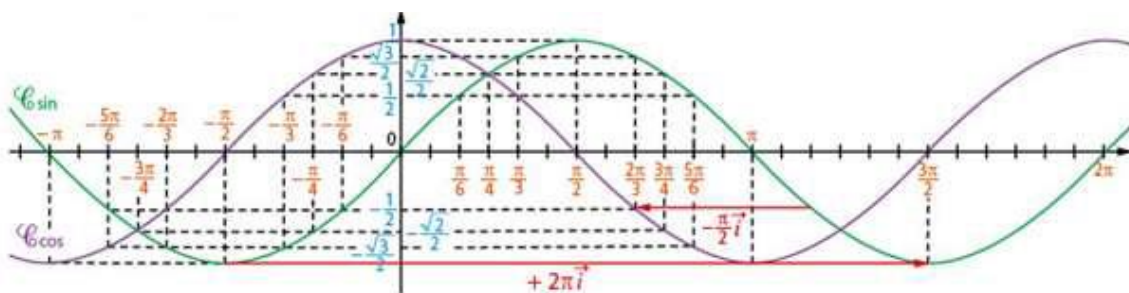


On a vu en Première que, pour tout réel x , $\cos(x+2\pi) = \dots\dots\dots$ et $\sin(x+2\pi) = \dots\dots\dots$.
On en déduit que :

Propriété 5. Périodicité des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par la de vecteur



Exercice ④

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

1) Étudier la parité de la fonction f .



[corrigé en vidéo](#)

2) Démontrer que f est périodique de période π .



[corrigé en vidéo](#)

3) Représenter graphiquement la fonction f .



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ⑤

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(4x) - \sin^2(x)$.

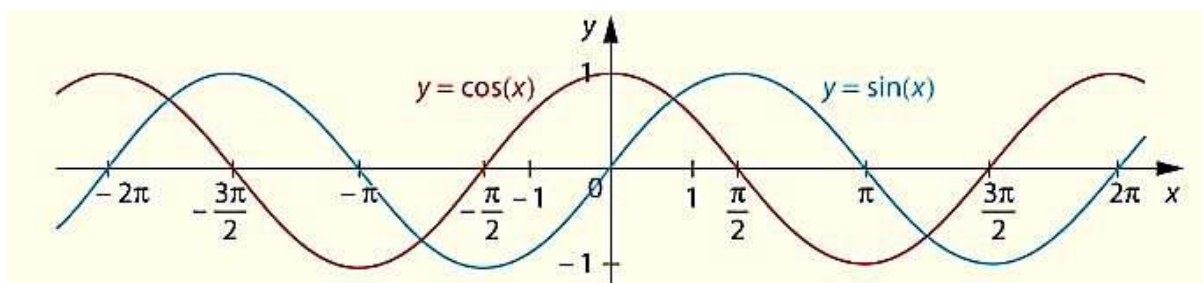
1) Tracer à l'aide d'une calculatrice, la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

2) Montrer que, pour tout réel x , $g(-x) = g(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

3) a) Conjecturer graphiquement que f est périodique et donner sa période.

b) Démontrer cette conjecture par le calcul.

4. Représentations graphiques



5. Compléments sur la dérivation

Propriété 6. Compléments sur la dérivation

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

• La fonction f définie par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur I et

$f'(x) = \dots\dots\dots$

• La fonction f définie par $f(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I et

$f'(x) = \dots\dots\dots$

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.
Étudier les variations de la fonction f .



[corrigé en vidéo](#)

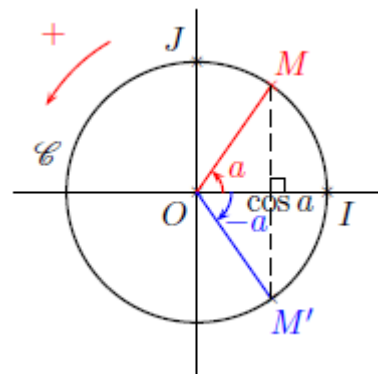
6. Equations trigonométriques

Propriété 7. Equations trigonométriques

L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet pour solutions les nombres réels $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$ où k est un nombre relatif.

Démonstration :

Graphiquement, il existe deux points M et M' sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus. Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (OI). On retrouve ici la propriété énoncée au paragraphe précédent concernant les angles associés : pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$.



Exemple : L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$, qui équivaut à $\cos(x) = \cos(\dots)$, a pour solution $\dots + 2k\pi$ et $\dots + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.



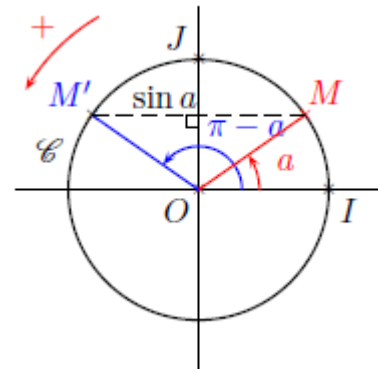
[corrigé en vidéo](#)

Propriété 8. Equations trigonométriques

L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ admet pour solutions les nombres réels $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$ où k est un nombre relatif.

Démonstration :

Graphiquement, il existe deux points M et M' sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ qui correspondent à des angles qui ont le même sinus. Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (OJ). On retrouve ici la propriété énoncée au paragraphe précédent concernant les angles associés : pour tout réel x , $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



Exemple : L'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, qui équivaut à $\sin(x) = \sin(\dots)$, a pour solution $\dots + 2k\pi$ et $\pi - \dots + 2k\pi = \dots + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

Exercice ③

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = 1$.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ④

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.