COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION ET CONTINUITÉ

Cours	**Terminale Spé maths**

Objectifs :

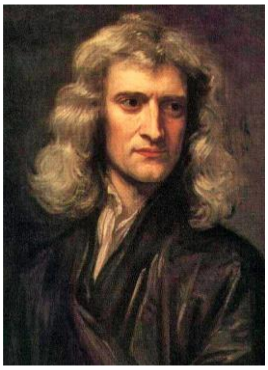
• Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
• Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
• Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Histoire des Mathématiques

L'histoire du calcul infinitésimal remonte à l'Antiquité. Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens : Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz. Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Archimède, Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment.
La notion de nombre dérivé a vu le jour au xviie siècle dans les écrits de Gottfried Wilhelm Leibniz et d'Isaac Newton qui le nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Le domaine mathématique de l'analyse numérique connut dans la seconde moitié du xviie siècle une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'infiniment petit et de son rapport avec les sommes dites intégrales.
C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du xvii^e siècle, a, le premier, mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du xvii^e siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits. Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.
Néanmoins cette théorie tout juste éclose n'est pas encore, à l'époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable. C'est au xviii^e siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : R n'est pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du xix^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.
C'est à Lagrange (fin du xviii^e siècle) que l'on doit la notation $f_0(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique. *(source : wikipédia)*

Ainsi l'histoire retient que la notion de dérivée a été introduite par le physicien anglais Isaac Newton (1643-1727) et le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).


Gottfried Wilhelm Leibniz


Isaac Newton

La paternité du calcul différentiel et du calcul intégral a été une source de conflit important entre les deux mathématiciens contemporains.
Le mathématicien Joseph-Louis Lagrange a défini le lien entre le signe de la dérivée d'une fonction.

2. Fonctions composées

Définition 1. *Fonction composée*

Soit f et g deux fonctions. On appelle fonction composée de f par g (ou composée de f suivie de g), et on note $g \circ f$ (lire « g rond f ») , la fonction définie par : $(g \circ f)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

L'écriture $(g \circ f)(x)$ n'a de sens que si $x \in$ .... et $f(x) \in$ ....
Ainsi dire que $x \in \mathscr{D}_{g \circ f}$ revient à dire que $x \in$ .... et $f(x) \in$.......... .

Exemple : On considère les fonctions $f : x \mapsto x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$g \circ f$ est définie si, et seulement si $x \in$ .... et $f(x) \in$.........., si, et seulement si,

.... $\neq 0$.

Ainsi $\mathscr{D}_{g \circ f}$ = ... et, pour tout $x \in \mathscr{D}_{g \circ f}$: $(g \circ f)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

$f \circ g$ est définie si, et seulement si, $x \in$ .... et $g(x) \in$ .... , <u>ssi</u> $x \neq 0$.

Ainsi $\mathscr{D}_{f \circ g}$ = ... et, pour tout $x \in \mathscr{D}_{f \circ g}$: $(f \circ g)(x) =$ .... = ...

Remarque : On notera que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont le plus généralement différentes.

Exercice ❶

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

Déterminer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

Propriété 1. *Dérivée d'une fonction composée*

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x de I, $u(x) \in \mathrm{J}$ et v une fonction définie et dérivable sur J.

La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur I, et, pour tout réel x de I,

$f'(x) = (v \circ u)'(x) =$ ....

Exercice ❷

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

corrigé en vidéo

Propriété 2. *De nouvelles formules de dérivées*

- **Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.**

La fonction composée e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction ....

- **Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.**

La fonction composée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction ......

- **Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.**

La fonction u^n est dérivable sur I et pour tout réel x de I : ....

Exemples :

• Soit $f(x) = e^{3x-1}$. La fonction u définie par $u(x) = 3x - 1$ est dérivable sur **R**.

Donc f est dérivable sur **R**, et pour tout réel x, $f'(x) =$ .... = ...

• Soit $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$. La fonction v définie par $v(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.

Donc g est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout réel x non nul, $g'(x) =$ .... = ...

• Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x+6}$.

f est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > -2$, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

• Soit $f(x) = (3x+7)^3$. La fonction u définie par $u(x) = 3x+7$ est dérivable sur **R**.
Donc f est dérivable sur **R**, et pour tout réel x,

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Exercice ❸

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'ensemble I.

a) $f(x) = (2x^3-3)^2$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; b) $g(x) = (x-1)^3$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; c) $h(x) = (2x-1)e^{-x+3}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;

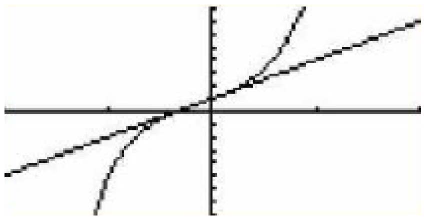
d) $m(x) = \sqrt{x^2+x+1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; e) $n(x) = \dfrac{1}{(x+6)^3}$; $\mathrm{I} = \ ]-6\ ;+\infty[$.

Exercice ❹

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (3x+1)e^{x^2}$.

On a tracé ci-contre $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative ainsi que la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



1) Calculer $f'(x)$.

2) Étudier les variations de f.

3) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.

b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $\mathscr{T}$.

3. Continuité d'une fonction

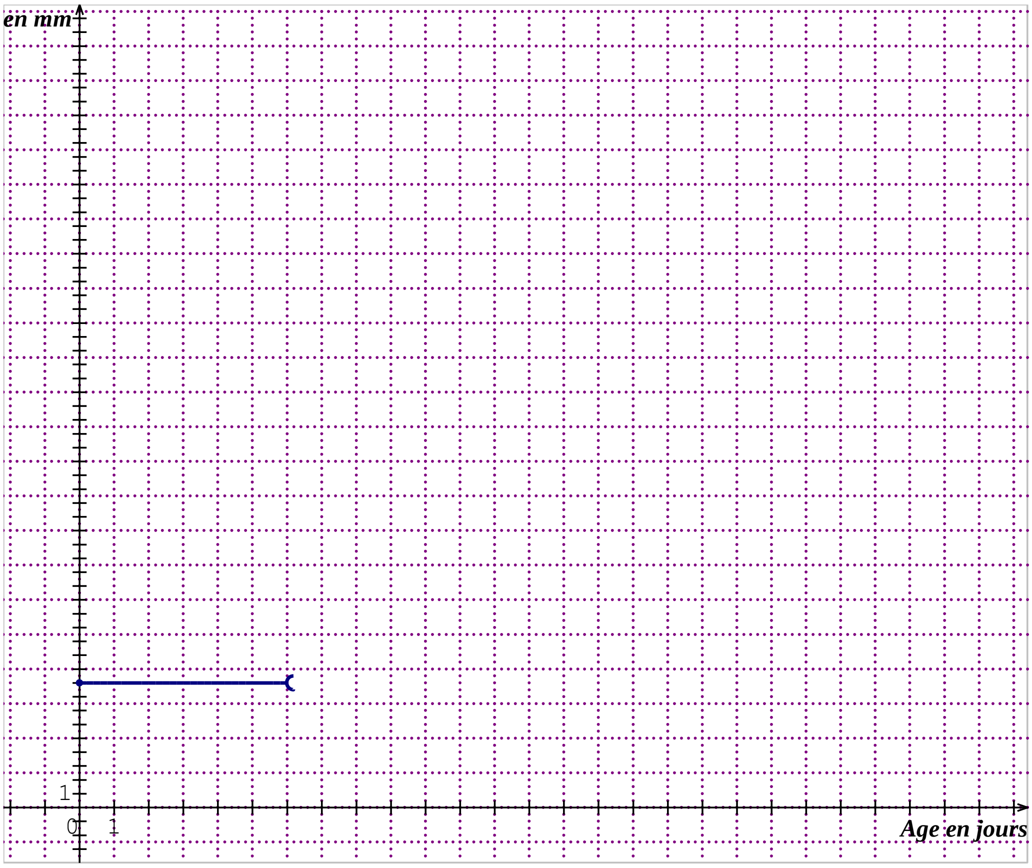
Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille du criquet, s'accroît brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue. Les biologistes disent que le criquet a une croissance « discontinue ». Le tableau ci-dessous donne la taille du criquet en fonction de son âge.

Age du criquet	Taille du criquet
De 0 à 6 jours exclu	9 mm
De 6 à 8 jours exclu	12 mm
De 8 à 10 jours exclu	16 mm
De 10 à 13 jours exclu	21 mm
De 13 à 16 jours exclu	27 mm
A partir du 16ème jour	40 mm

a) Compléter le graphique suivant qui représente la fonction suivante :

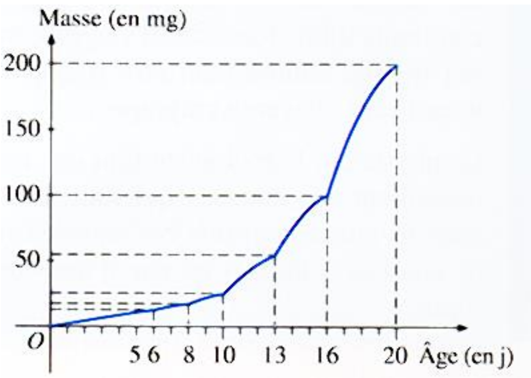
$$f : (\text{âge en jours}) \mapsto (\text{taille en mm})$$



La courbe précédente $\mathscr{C}_f$ peut-elle être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 13 ?

b) Le graphique ci-dessous représente la fonction suivante :

$$g : (\text{âge en jours}) \mapsto (\text{masse en mg}).$$



Cette courbe peut-elle être tracée sans lever le crayon ?

<u>Conclusion</u> : ……………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Définition 2. *Fonction continue*

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ...$.

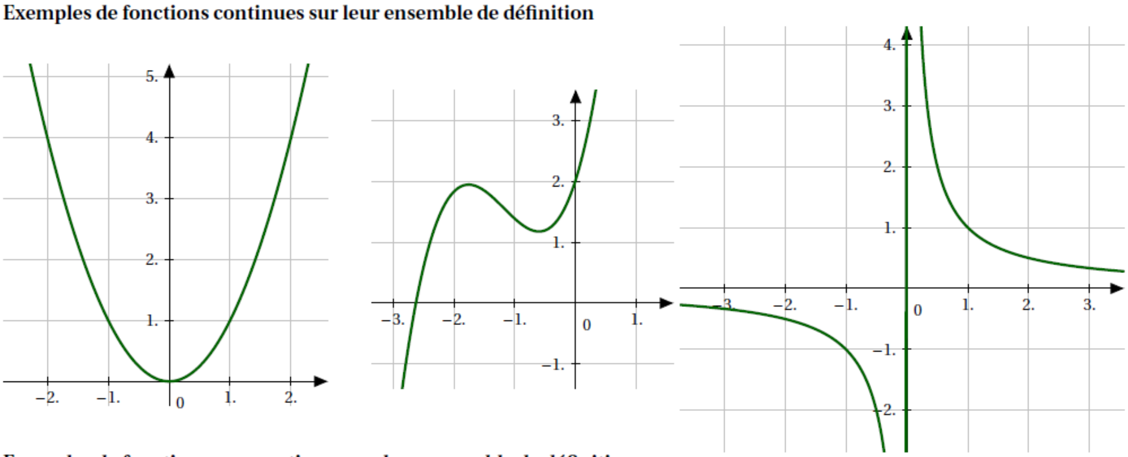
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction continue en tout point a de **R**, elle est donc continue sur **R**.
On peut le justifier en démontrant que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x suffisamment proche de a.
La parabole représentant la fonction $x \mapsto x^2$ peut être tracée sans lever le crayon de la feuille.

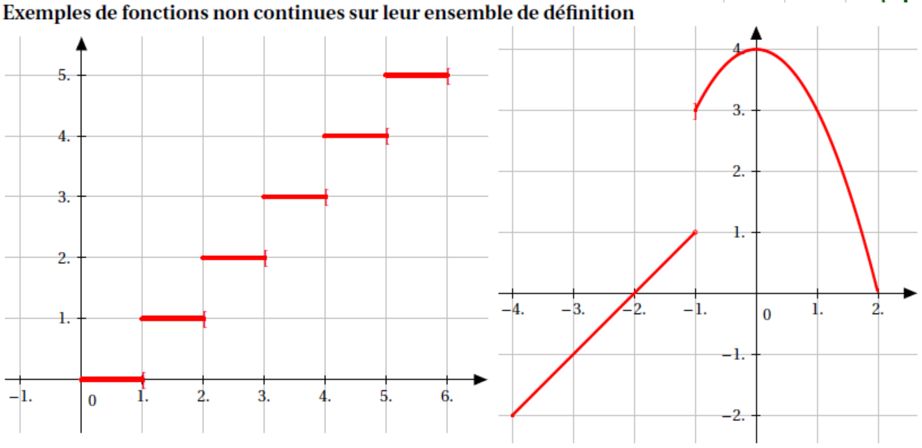
Remarques : • Lorsque a est la borne d'un intervalle fermé, on étudie la limite à gauche ou la limite à droite en a selon les cas.

• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ équivaut à $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Exemples de fonctions continues sur leur ensemble de définition



Exemples de fonctions non continues sur leur ensemble de définition



Propriété 3. *Dérivation et continuité*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.

Si f est .... en a, alors f est continue en a

Remarques : • Cette propriété nous donne un moyen pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I ; il suffit en effet de démontrer que cette fonction est dérivable sur I.

• La réciproque de cette propriété est fausse.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

• Dans un tableau de variations, on ne coupe pas les flèches sur les intervalles où la fonction f est continue et monotone.

Exemple : Voici le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$:

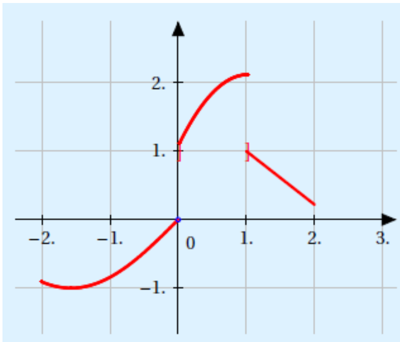
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	‖	↘

Ce tableau représente une fonction continue sur $]-\infty\,;\,2[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$.

Propriété 4 : *Continuité des fonctions de référence*

• Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
• La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
• La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Exercice ❺



On a représenté une fonction f définie sur l'intervalle I.

1) Quel est l'intervalle I ?
2) f est-elle continue sur $[-2\,;\,1]$? Justifier clairement.
3) f est-elle continue sur $]0\,;\,2]$? Justifier clairement.
4) Donner un intervalle sur lequel f est continue.

Exercice ❻

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)e^{x}$.
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice ❼

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x<3\\ x-4 & \text{si } 3\le x<5\\ -2x+13 & \text{si } x\ge 5\end{cases}$.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

corrigé en vidéo

Exercice ❽

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 \text{ si } x\leq 1 \\ x^2+2 \text{ si } 1<x<3 \\ ax-a \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$.

a) La fonction f est-elle continue en 1 ?
b) Déterminer le nombre a pour lequel f sera continue en 3.

4. Application à l'étude de suites

Propriété 5. *Continuité et limite d'une suite*

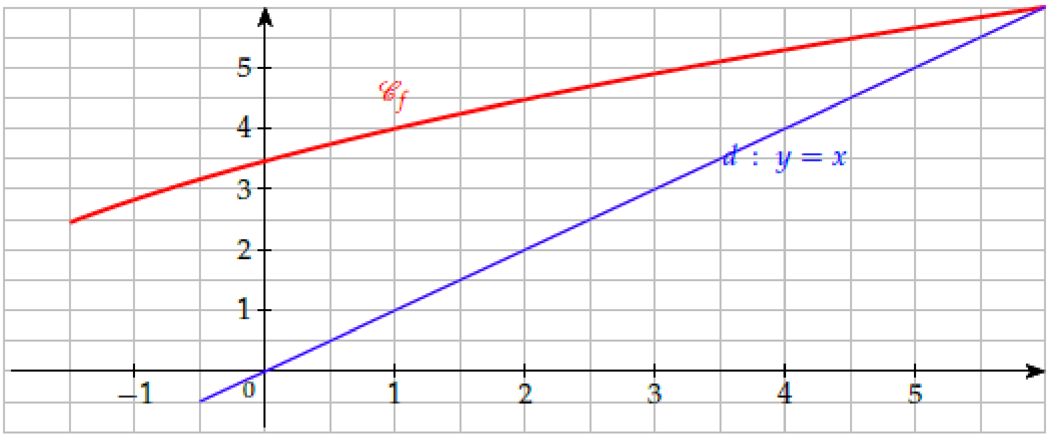
Soient f une fonction continue sur un intervalle $\mathbf{I}$, ℓ un réel appartenant à $\mathbf{I}$ et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbf{I}$.
Si (u_n) converge vers ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.
En particulier, si (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n, alors ℓ est solution de l'équation $f(\ell)=\ell$.

Exemple : Soit (u_n) la suite convergente définie par $u_0=8$ et $u_{n+1}=0{,}85u_n+1{,}8$.
On remarque que $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}85x+1{,}8$.
Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la limite ℓ de la suite est alors solution de l'équation $f(\ell)=\ell$.

Or $f(\ell)=\ell$ équivaut à $0{,}85\ell+1{,}8=\ell$, c'est-à-dire à $1{,}8=0{,}15\ell$, ou encore à $\ell=\dfrac{1{,}8}{0{,}15}=12$.

Exercice ❾

Soit (u_n) la suite u définie par $u_0=-1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x+3}$.
On donne sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite d'équation $y=x$.



1) Sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessus, placer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2) Étudier les variations de f sur $[-2\,;+\infty[$.
3) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.

4) Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis déterminer ℓ.

Propriété 6. ***Variations d'une suite à l'aide de sa fonction associée***

Soient une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(u_n)$.

- **Si f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est ………………..**
- **Si f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est ………………...**

Exercice ❿

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer les variations de la suite (u_n).

corrigé en vidéo

Exercice ❶❶

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 5n^2 + 9n + 3$.

Déterminer les variations de la suite (v_n).

C. Lainé