ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectifs :

- *Pour une équation différentielle $y' = a\,y + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.*
- *Pour une équation différentielle $y' = a\,y + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.*

1. Résolution de l'équation différentielle $y'=ay$

Propriété 1. Équation différentielle $y' = ay$

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par ……………………… où k est un réel quelconque.

Démonstration : La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f_k'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$. Donc f_k est une solution particulière de l'équation $y' = ay$.

Démontrons ensuite que les fonctions f_k sont les seules solutions.

On considère pour cela une fonction g solution de l'équation $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction h définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Comme g est une solution de l'équation $y' = ay$, on en déduit que $h'(x) = \ldots\ldots\ldots$ pour tout réel x. Par suite, h est une fonction ……………………...

Il existe donc un réel k tel que pour tout réel x, $h(x) = \ldots\ldots$, c'est à dire $g(x)e^{-ax} = \ldots\ldots$.

Par conséquent, $g(x) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$.

démonstration en vidéo

Exercice ❶

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

b) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

correction en vidéo

2. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 2. Équation différentielle *y' = ay*

Soient a et b deux nombres réels $(a \neq 0)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies par $f_k(x) = \dots\dots\dots\dots$ où k est un réel quelconque.

Remarque : La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $f_k = g_k + h$ où g_k sont les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ et h est la solution particulière **constante** de l'équation $y' = ay + b$?

Exercice ❷

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 2$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E).

b) Déterminer toutes les solutions de de l'équation (E).

c) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = 1$.

correction en vidéo

3. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$

Propriété 3. Équation différentielle *y' = ay + f*

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle $\mathbf{I}$. Etant donnée une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y' = ay + f$, les solutions de cette équation sont les fonctions définies par $f_k(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$

où k est un réel.

Exercice ❸

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x^2$.

a) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation (E).

correction en vidéo

Exercice ❹

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

a) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice ❺

Au XVIIème siècle Newton énonça que « La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ».

Vous faites un gâteau au chocolat. La recette indique de le servir tiède-chaud (30 °C) accompagné d'une boule de glace à la vanille. A 19h15, vous sortez le gâteau du four, sa température est alors de 200 °C.
Votre cuisine est chauffée à 20 °C et vous aller y laisser refroidir le gâteau.

1) Notons $f(t)$ la température du gâteau t minutes après sa sortie du four. Expliquer pourquoi, d'après Newton, il existe une constante réelle k pour laquelle la fonction f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = k(y - 20)$.

2) Montrer que la température peut alors s'écrire $f(t) = 180e^{kt} + 20$.

Quel est le signe de la constante k ?
3) Sachant qu'à 20 h la température du gâteau est égale à 100 °C, déterminer une valeur approchée au dix-millième de la constante k.
4) Déterminer alors à l'heure à laquelle vous pourrez déguster le gâteau.

Exercice ❻

L'atmosphère terrestre contient naturellement un isotope radioactif du carbone, le carbone 14.
Ce carbone va être absorbé par tous les êtres vivants. A leur mort, celui-ci se désintègre.
La vitesse de désintégration des atomes est proportionnelle au nombre d'atomes présents.

1) On note t le nombre d'années écoulées depuis la mort de l'organisme étudié et $f(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 alors contenus dans l'échantillon. On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ avec $k = -1{,}2097 \times 10^{-4}$.
Résoudre cette équation différentielle.
2) Quel pourcentage d'atomes de carbone 14 sont encore présents au bout de 10 000 ans ?
3) On analyse des ossements trouvés dans la grotte Chauvet-Pont d'Arc.
On constate que l'échantillon de contient plus que 2,5 % de son carbone 14.
Estimer leur âge.

Exercice ❼

Sans limitation de place ni de ressources par exemple, on peut postuler que l'accroissement d'une population est proportionnel à la population elle-même.
Suivant cette idée :
- *Euler propose en 1760 un modèle discret à l'aide de suites géométriques* $p_{n+1} = \lambda p_n$.
- *En 1798, Malthus propose un modèle continu à l'aide l'équation différentielle* $p' = \lambda p$.

En réalité, lorsqu'elle croît une population rencontre des facteurs limitants.
- *En 1840, Verhulst qui postule qu'il y a une population maximale M.*

Il propose alors un modèle logistique reposant sur l'équation différentielle $p' = \lambda p(M - p)$.
Ce modèle lui permet de donner en 1837 une prévision de la population de la France en 1930 de 40 millions, prévision vérifiée puisque la population de la France est de 41 millions en 1931.

On lâche 25 lapins sur une île déserte.
On note $p(x)$ le nombre de lapins au bout de x années.
On admet que la fonction p est une solution de l'équation logistique (E_1) : $y' = 2y(1-0{,}005y)$

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \dfrac{1}{p(x)}$.

1) Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' = -2y + 0{,}01$.
2) Résoudre l'équation différentielle (E_2).

Partie B

1) En utilisant la partie A, montrer que $p(x) = \dfrac{1\,000}{5 + 35e^{-2x}}$.
2) Combien y aurait-il de lapins au bout de 3 mois ?
3) Combien y aurait-il de lapins au bout de 6 mois ?
4) Combien y aurait-il de lapins au bout de 2 ans ?

Exercice ❽

Les unités de mesure utilisées sont les unités S.I.
Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ; on note $a = RC$. La tension aux bornes du condensateur est une fonction V du temps t définie sur $[0\,;+\infty[$.
On admet que V est une fonction dérivable solution de l'équation différentielle :

$$V' + \frac{1}{a}V' = 0 \quad (E)$$

1) Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle (E).
2) On rappelle que pour $V(0) = 20$. Déterminer l'expression de V.