BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Une primitive F sur $\mathbf{R}$ de la fonction f est définie par :

A. $\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$

B. $\mathrm{F}(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$

C. $\mathrm{F}(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$

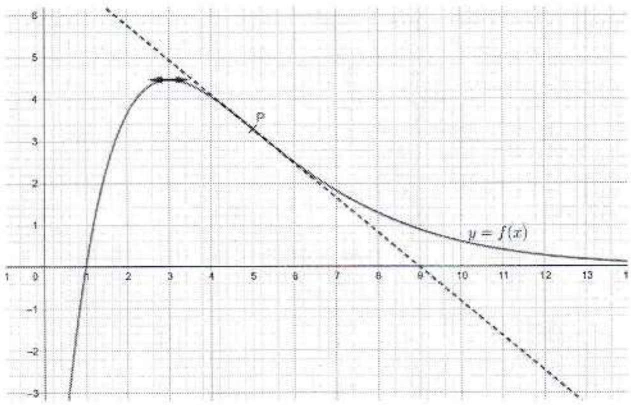
D. $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x^2}$

Question 2 :

La courbe C ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe C.



On a :

A. pour tout $x \in]0;5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

B. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

C. pour tout $x \in]0;5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

D. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Question 3 :

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{a}{b+e^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.

On sait que $g(0) = 2$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

A. $a = 2$ et $b = 3$

B. $a = 4$ et $b = \frac{4}{3}$

C. $a = 4$ et $b = 1$

D. $a = 6$ et $b = 2$

Question 4 :

Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher. L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges. L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.

Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte. La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{8}$

Question 5 :

On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$.

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.

```
def somme_a():
  S=0
  for k in range(100):
    S=1/(k+1)
  return S
```

b.

```
def somme_b():
  S=0
  for k in range(100):
    S=S+1/(k+1)
  return S
```

c.

```
def somme_c():
  k=0
  while S <100:
    S=S+1/(k+1)
  return S
```

d.

```
def somme_d():
  k=0
  while k <100:
    S=S+1/(k+1)
  return S
```

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+3) - 1$.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.

On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;+\infty[$.

3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

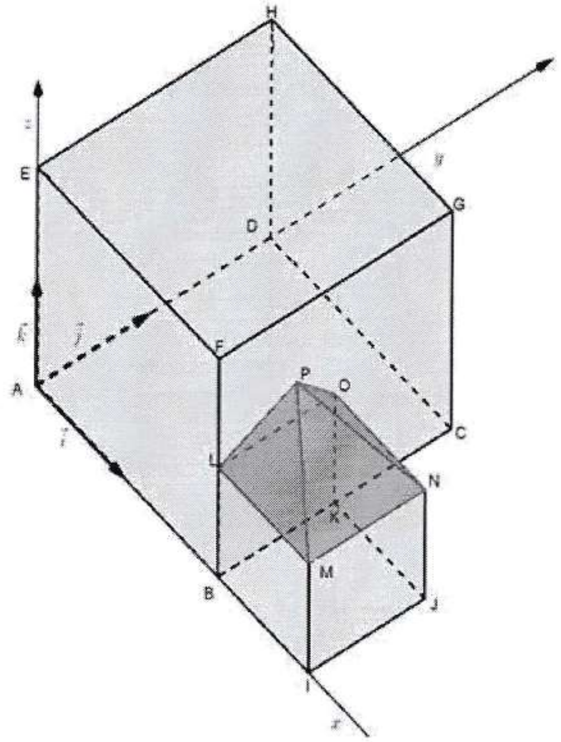
On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\,;+\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1;\alpha]$ alors $f(x) \in [-1;\alpha]$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$
   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3 (6 points)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC]. Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.
3. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$
   b. Calculer la distance PM .

On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.

   c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°. Le toit pourra-t-il être construit ?

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes. Quel est leur point d'intersection ?

Exercice 4 (3 points)

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases.

La première phase est une phase de qualification. Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est 0,6 .

La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés. Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés. Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n°1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80% des cas.

Condition n°2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Le jeu peut-il être retenu ?