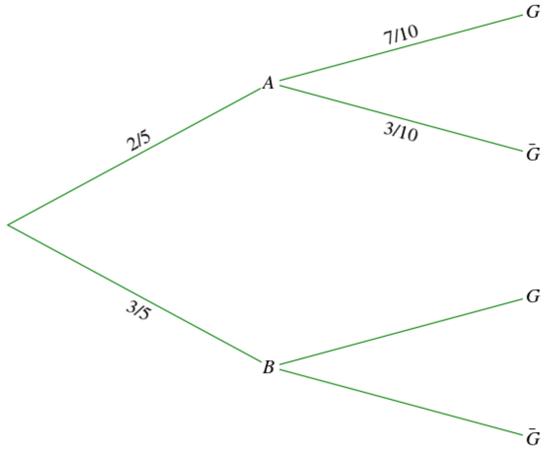
Métropole, sujet 2, mars 2023

Exercice 1



1) On cherche $p(A \cap G)$. Or $p(A \cap G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$.

La réponse correcte est donc la c.

2) $p_B(G) = \frac{p(B \cap G)}{p(B)} = \frac{p(B \cap G)}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \times p(B \cap G)$. Or, d'après la formule des probabilités totales, $p(G) = p(A \cap G) + p(B \cap G)$, c'est-à-dire $p(B \cap G) = p(G) - p(A \cap G)$.

D'où $p(B \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$. Par conséquent, $p_B(G) = \frac{5}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$.

La réponse correcte est donc la b.

3) Soit X la variable aléatoire qui dénombre les parties gagnées.

Gagner une partie est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{12}{25}$.

Cette épreuve est répétée 10 fois de façon identique et indépendante.

Donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10 \; ; \; \frac{12}{25}\right)$.

La probabilité de gagner exactement 6 parties est $p(X = 6)$.

$p(X = 6) = \text{binomFdp}\left(10, \frac{12}{25}, 6\right) \approx 0{,}188$. **La réponse correcte est donc la c**.

4) On cherche n tel que $p(X \leq n) \approx 0{,}207$. En utilisant la calculatrice, on obtient : $p(X \leq 3) \approx 0{,}207$.

La réponse correcte est donc la b.

X	Y1
0	0.0014
1	0.0148
2	0.0702
3	0.2067
4	0.427
5	0.6712
6	0.859
7	0.958
8	0.9923
9	0.9994
10	1

5) La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p(X \geq 1)$.

Or $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{12}{25}\right)^0 \times \left(1 - \frac{12}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$.

La réponse correcte est donc la d.

Exercice 3

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

1) Le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois. Or le coefficient multiplicateur associé à une telle hausse est $1+\frac{60}{100}=1{,}6$. Par suite, $u_{n+1}=1{,}6\times u_n$, pour tout entier n.

D'où la suite (u_n) est géométrique de raison 1,6 et de premier terme $u_0=0{,}1$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $u_n=0{,}1\times(1{,}6)^n$**.

2) Comme $-1<1{,}6<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1{,}6)^n=+\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ (par produit de limites).

3) On résout l'inéquation $0{,}1\times(1{,}6)^n>0{,}4$.

Or $0{,}1\times(1{,}6)^n>0{,}4$ équivaut à $(1{,}6)^n>\frac{0{,}4}{0{,}1}$, car 0,1 est strictement positif, c'est-à-dire $(1{,}6)^n>4$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, alors $(1{,}6)^n>4$ équivaut à $\ln\left((1{,}6)^n\right)>\ln(4)$, c'est-à-dire à $n\times\ln(1{,}6)>\ln(4)$.

Comme $\ln(1{,}6)>0$, on en déduit que $n\times\ln(1{,}6)>\ln(4)$ équivaut à $n>\frac{\ln(4)}{\ln(1{,}6)}$.

Or $\frac{\ln(4)}{\ln(1{,}6)}\approx 2{,}9$; donc **$u_n>0{,}4$ lorsque n est supérieur ou égal à 3**.

4) Cela signifie que, selon ce modèle, le nombre d'insectes sera supérieur à 400 000 à partir du 3ème mois. Donc **l'équilibre du milieu naturel n'est pas préservé**.

Partie B : Étude d'un second modèle

1) $v_1=1{,}6\times v_0-1{,}6\times {v_0}^2=0{,}144$. **Au bout d'un mois, il y aura 144 000 insectes**.

2) a) $f(x)=x$ équivaut à $1{,}6x-1{,}6x^2=x$, c'est-à-dire à $0{,}6x-1{,}6x^2=0$.
Or $0{,}6x-1{,}6x^2=0$ équivaut à $x(0{,}6-1{,}6x)=0$, c'est-à-dire à $x=0$ ou $0{,}6-1{,}6x=0$

Et $0{,}6-1{,}6x=0$ équivaut à $x=\frac{0{,}6}{1{,}6}=0{,}375$.

Donc l'équation **$f(x)=x$ admet deux solutions,0 et 0,375, dans $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$**.

b) La fonction f est une fonction du second degré avec $a=-1{,}6$ (négatif). Elle admet donc un maximum atteint en $-\frac{b}{2a}=-\frac{1{,}6}{2\times(-1{,}6)}=\frac{1}{2}$.

Par conséquent, **la fonction f est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$**.

3) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbb{N}$, $0\le v_n\le v_{n+1}\le\frac{1}{2}$ »

→ *Initialisation* : Comme $v_0=0{,}1$ et $v_1=0{,}144$, alors on a bien $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Comme la fonction f est croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ alors $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Or $f(0)=0$, $f(v_n)=v_{n+1}$, $f(v_{n+1})=v_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=0,4$; d'où $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 0,4 < \frac{1}{2}$

Par suite, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n, soit : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$**.

b) D'après la question précédente, on en déduit que la suite (v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. Par conséquent, **(v_n) converge vers un réel ℓ**.

c) D'après l'énoncé, ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.
D'après la question 2), $\ell=0$ ou $\ell=0,375$. Comme (v_n) est croissante et que $v_0=0,1$, alors tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 0,1. Par conséquent, **$\ell = 0,375$**.
A long terme, il y aura 375 000 insectes selon ce modèle, ce qui est inférieur à 400 000.
Donc **l'équilibre du milieu naturel sera préservé**.

4) a) **Si on saisit `seuil(0.4)`, le programme ne s'arrêtera jamais**. En effet, toutes les valeurs de (v_n) sont comprises entre 0,1 et 0,375.

b) **Si on saisit `seuil(0.35)`, la valeur renvoyée sera 6**.
Le nombre d'insectes sera supérieur à 350 000 au cours du 6ème mois.

Exercice 3

1) a) **$\overrightarrow{n_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$**.

b) $\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2} = 2\times1+1\times(-1)+(-1)\times1=2-1-1=0$. D'où ces deux vecteurs sont orthogonaux, et ainsi, **les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires**.

2) Comme $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$, alors $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x-y+z+d=0$.
Comme $B(1\,;1\,;2)$ appartient à ce plan, alors $1-1+2+d=0$, c'est-à-dire $2+d=0$; d'où $d=-2$. Par conséquent, **une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ est : $x-y+z-2=0$**.

b) Résolvons le système $\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} 2x+y-z+2=0 & (L_1) \\ x-y+z-2=0 & (L_2) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x=0 & (L_1)+(L_2) \\ x-y+z-2=0 & (L_2) \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} 3x=0 \\ -y+z-2=0 \end{cases}$,

ou encore à $\begin{cases} x=0 \\ y=z-2 \end{cases}$.

En prenant $z = t$, on obtient : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$, ce qui une représentation paramétrique de Δ. Par conséquent, **$\Delta\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$**.

3) a) $AM_t = \sqrt{(0-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

Donc, **pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$**.

b) Comme H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ, AH est la distance minimale de A à la droite. Cherchons la valeur minimale de AM_t.

Or $AM_t'(t) = \dfrac{4t-8}{2\sqrt{2t^2-8t+11}} = \dfrac{2t-4}{\sqrt{2t^2-8t+11}}$. Comme $\sqrt{2t^2-8t+11} > 0$ pour tout réel t, alors le signe de $AM_t'(t)$ dépend de celui de $2t-4$.

signe de $a = 2$

$2t - 4 = 0$ lorsque $t = 2$. D'où :

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$AM_t'(t)$		$-$	0	$+$	
AM_t		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Par conséquent, la valeur minimale de AM_t est $\sqrt{3}$, c'est-à-dire que **$AH = \sqrt{3}$**.

4) a) Comme $\mathscr{D}_1$ est la droite orthogonale à $\mathscr{P}_1$, alors $\vec{n_1}$ est un vecteur directeur de cette droite. Donc une représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 + t} \\ \boldsymbol{z = 1 - t} \end{cases}$ $(\boldsymbol{t \in \mathbb{R}})$.

b) $\mathscr{D}_1$ coupe le plan $\mathscr{P}_1$ en H_1. Résolvons alors le système $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2(1+2t) + (1+t) - (1-t) + 2 = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 4 + 6t = 0 \end{cases}$

ou encore à $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3} \\ y = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \\ z = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$. Donc **les coordonnées du point H_1 sont $\left(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$**.

5) $\overrightarrow{HH_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{H_2A}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-\frac{4}{3} \\ 1-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{HH_1}$ et $\overrightarrow{H_2A}$ sont égaux. Par suite, AH_1HH_2 est un parallélogramme.
On sait que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires. Comme $\overrightarrow{H_2A}$ est normal à $\mathscr{P}_2$ et que $\overrightarrow{H_1A}$ est normal à $\mathscr{P}_1$, alors les vecteurs $\overrightarrow{H_2A}$ et $\overrightarrow{H_1A}$ sont orthogonaux.
Or un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle. Donc ***AH_1HH_2* est un rectangle**.

Exercice 4

1) a) $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (en restant positive), alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ (par quotient de limites). Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (par somme de limites). Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ (limite d'une fonction composée).

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (par quotient de limites). Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1$ (par somme de limites). Or $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ (limite d'une fonction composée).
La courbe $\mathscr{C}$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

c) On a : $f = \ln(u)$ avec $u(x) = 1+e^{-x}$.

D'où : $f' = \frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = 0+(-1)\times e^{-x} = -e^{-x}$.

Donc, **pour tout réel x, $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$**.

Or $\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x}\times e^x}{\left(1+e^{-x}\right)\times e^x} = \frac{-e^0}{e^x+e^0} = \frac{-1}{1+e^x}$. Donc, **pour tout réel x, $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$**.

d) Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, alors $f'(x) < 0$. On en déduit que :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	0

2) a) T_0 a pour équation $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$.

Or $f'(0) = \frac{-1}{1+e^0} = -0{,}5$ et $f(0) = \ln\left(1+e^0\right) = \ln(2)$.

Donc **T_0 a pour équation $y=-0{,}5x+\ln(2)$**.

b) On a : $f'=-\dfrac{1}{v}$ avec $v(x)=1+e^x$.

D'où : $f''=-\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)=\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v'(x)=0+e^x=e^x$.

Par suite, pour tout réel x, $f''(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

Comme $e^x>0$ et $\left(1+e^x\right)^2>0$, alors $f''(x)>0$ pour tout réel x.

On en déduit que **la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$**.

c) Comme la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes les tangentes sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, **pour tout réel x dans $]0\,;\,e]$: $f(x)\geq -0{,}5x+\ln(2)$**.

4) $f(x)-f(-x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-\ln\left(1+e^x\right)=\ln\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1+e^x}\right)=\ln\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{e^x}}{1+e^x}\right)=\ln\left(\dfrac{\dfrac{e^x+1}{e^x}}{1+e^x}\right)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{\left(1+e^x\right)e^x}\right)$

Donc, **pour tout réel x, $f(x)-f(-x)$**$=\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=-\ln\left(e^x\right)$**$=-x$**.

b) Le coefficient directeur de la droite T_0 est $-0{,}5$.

Le coefficient directeur de la droite (M_aN_a) est égal à $\dfrac{y_{N_a}-y_{M_a}}{x_{N_a}-x_{M_a}}=\dfrac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)}=\dfrac{(-a)}{2a}=-\dfrac{1}{2}$.

Comme T_0 et (M_aN_a) ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles.