Métropole, sujet 1, mai 2022

Exercice 1

Partie A : Étude du premier protocole

1) a) On a : $f = u \times e^{v}$ avec $u(t) = 3t$ et $v(t) = -0{,}5t + 1$.

D'où : $f' = u' \times e^{v} + u \times \left(e^{v}\right)' = u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v}$ avec $u'(t) = 3$ et $v'(t) = -0{,}5$.

$\boldsymbol{f'(t)} = 3 \times e^{-0{,}5t+1} + 3t \times (-0{,}5) \times e^{-0{,}5t+1} = (1 - 0{,}5 \times t)3e^{-0{,}5t+1} \boldsymbol{= 3(1 - 0{,}5t)e^{-0{,}5t+1}}$.

b) Comme $3e^{-0{,}5t+1} > 0$, alors le signe de $f'(t)$ dépend de celui de $1 - 0{,}5t$.

Or $1 - 0{,}5t = 0$ lorsque $t = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$.

D'où :

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	6	↘	$30e^{-4}$

$f(0) = 3 \times 0 \times e^{-0{,}5\times 0+1} = 0$; $f(2) = 3 \times 2 \times e^{-0{,}5\times 2+1} = 6 \times 1 = 6$ et $f(10) = 30e^{-0{,}5\times 10+1} = 30e^{-4}$.

c) D'après le tableau de variation précédent, **la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale au bout de 2 heures, et sa valeur maximale sera de 6 mg**.

2) a) La fonction f est dérivable, donc continue, sur $[0\ ;\ 2]$, et, elle est strictement croissante sur cet intervalle.
L'intervalle image de $[0\ ;\ 2]$ par f est $[0\ ;\ 6]$, et, $5 \in [0\ ;\ 6]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$**.
D'après la calculatrice, $\boldsymbol{\alpha \approx 1{,}02}$.

b) D'après les questions précédentes, $f(t) \geq 5$ sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$.
Or $\beta - \alpha = 3{,}46 - 1{,}02 = 2{,}44$, et, $0{,}44 \times 60 \approx 26$.
Donc **le médicament est efficace durant 2 h 26 min dans le cas de ce protocole**.

Partie B : Étude du deuxième protocole

1) $\boldsymbol{u_1} = \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) \times u_0 + 1{,}8 = 0{,}7 \times 2 + 1{,}8 \boldsymbol{= 3{,}2}$.

2) Comme on estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection, puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg, alors :

pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1}} = \left(1 - \dfrac{30}{100}\right)u_n + 1{,}8 \boldsymbol{= 0{,}7u_n + 1{,}8}$.

3) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \le u_{n+1} < 6$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = 3{,}2$, alors on a bien $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \ge 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n \le u_{n+1} < 6$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \le u_{n+2} < 6$.

Comme $0{,}7 > 0$, alors $0{,}7u_n \le 0{,}7u_{n+1} < 4{,}2$. Par suite, $0{,}7u_n + 1{,}8 \le 0{,}7u_{n+1} + 1{,}8 < 4{,}2 + 1{,}8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \le u_{n+2} < 6$.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n, soit : $u_n \le u_{n+1} < 6$**.

b) D'après la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Par conséquent, **(u_n) converge vers un réel ℓ**.

c) Comme $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$, en passant aux limites et comme la limite est unique, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$; par suite, $\ell = 0{,}7\ell + 1{,}8$.

Or $\ell = 0{,}7\ell + 1{,}8$ équivaut à $0{,}3\ell = 1{,}8$, c'est-à-dire à $\ell = \dfrac{1{,}8}{0{,}3} = 6$. Donc **$(u_n)$ converge vers 6.**

A long terme, la quantité de médicament présente dans le sang sera de 6 mg.

4) a) $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0{,}7u_n - 1{,}8 = 4{,}2 - 0{,}7u_n = 0{,}7(6 - u_n) = 0{,}7v_n$.

Donc **(v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}7$** et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = \mathbf{4}$.

b) D'après la question précédente, $v_n = v_0 \times (0{,}7)^n = \mathbf{4 \times (0{,}7)^n}$, **pour tout entier naturel n**.

Comme $v_n = 6 - u_n$, alors $u_n = 6 - v_n$. Donc $\mathbf{u_n = 6 - 4 \times (0{,}7)^n}$, **pour tout entier naturel n**.

c) On résout l'inéquation $6 - 4 \times (0{,}7)^n \ge 5{,}5$.

Or $6 - 4 \times (0{,}7)^n \ge 5{,}5$ équivaut à $-4 \times (0{,}7)^n \ge -0{,}5$, ou encore à $(0{,}7)^n \le \dfrac{-0{,}5}{-4}$, c'est-à-dire $(0{,}7)^n \le 0{,}125$.

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, alors $\ln\left((0{,}7)^n\right) \le \ln(0{,}125)$, d'où $n \times \ln(0{,}7) \le \ln(0{,}125)$.

Comme $\ln(0{,}7) < 0$, on en déduit que $n \times \ln(0{,}7) \le \ln(0{,}125)$ équivaut à $n \ge \dfrac{\ln(0{,}125)}{\ln(0{,}7)}$.

Or $\dfrac{\ln(0{,}125)}{\ln(0{,}7)} \approx 5{,}8$; donc $u_n \ge 5{,}5$ lorsque n est supérieur ou égal à 6.

Par conséquent, **6 injections ont été réalisées en appliquant ce protocole**.

Exercice 2

1) a) **Le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$**.

b) Le point B est un point de $\mathscr{D}$ s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} 1+2t=-1 \\ 2-t=3 \\ 2+2t=0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} 1+2t=-1 \\ 2-t=3 \\ 2+2t=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t=\dfrac{-1-1}{2} \\ t=\dfrac{3-2}{-1} \\ t=\dfrac{0-2}{2} \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$. Donc **$B$ appartient à $\mathscr{D}$**.

c) $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{u}} = (-1+1)\times 2+(3-1)\times(-1)+(0-3)\times 2 = 0+(-2)+(-6) \boldsymbol{= -8}$.

2) a) Comme la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, alors $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
D'où $\mathscr{P}$ a pour équation $2x-y+2z+d=0$.
Comme $A(-1\,;1\,;3)$ appartient à ce plan, alors $2\times(-1)-1+2\times 3+d=0$, c'est-à-dire $3+d=0$; d'où $d=-3$.
Par conséquent, **une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y+2z-3=0$**.

b) $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ en H. Résolvons alors le système $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \\ 2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \end{cases}$, c'est-à-dire à

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \\ 1+9t=0 \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} x=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9} \\ y=2+\dfrac{1}{9}=\dfrac{19}{9} \\ z=2-\dfrac{2}{9}=\dfrac{16}{9} \\ t=-\dfrac{1}{9} \end{cases}$.

Par conséquent, **les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{7}{9}\,;\dfrac{19}{9}\,;\dfrac{16}{9}\right)$**.

c) $\boldsymbol{AH} = \sqrt{\left(\dfrac{7}{9}+1\right)^2+\left(\dfrac{19}{9}-1\right)^2+\left(\dfrac{16}{9}-3\right)^2} \boldsymbol{= \dfrac{\sqrt{53}}{3}}$.

3) a) (BH) est une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$. On en déduit que $\mathscr{D}$ et (BH) sont parallèles, et ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Il existe donc un réel k tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{HB} = k\vec{u}}$.

b) $\overrightarrow{AB}\bullet\vec{u} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\bullet\vec{u} = \overrightarrow{AH}\bullet\vec{u}+\overrightarrow{HB}\bullet\vec{u} = 0+k\vec{u}\bullet\vec{u} = k\times\left\|\vec{u}\right\|^2$.

On en déduit que $\boldsymbol{k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}}$.

c) D'après la question précédente et la question 1) c), $\boldsymbol{k} = \dfrac{-8}{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\right)^2} = \boldsymbol{-\dfrac{8}{9}}$.

Comme $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$, alors $\begin{cases} -1-x_H = -\dfrac{8}{9}\times 2 = -\dfrac{16}{9} \\ 3-y_H = -\dfrac{8}{9}\times(-1) = \dfrac{8}{9} \\ 0-z_H = -\dfrac{8}{9}\times 2 = -\dfrac{16}{9} \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} -x_H = -\dfrac{16}{9}+1 = -\dfrac{7}{9} \\ -y_H = \dfrac{8}{9}-3 = -\dfrac{19}{9} \\ -z_H = -\dfrac{16}{9} \end{cases}$.

Par conséquent, **les coordonnées du point *H* sont $\left(\dfrac{7}{9}\,;\dfrac{19}{9}\,;\dfrac{16}{9}\right)$**.

4) $BH = \sqrt{\left(\dfrac{7}{9}-(-1)\right)^2+\left(\dfrac{19}{9}-3\right)^2+\left(\dfrac{16}{9}-0\right)^2} = \dfrac{8}{3}$

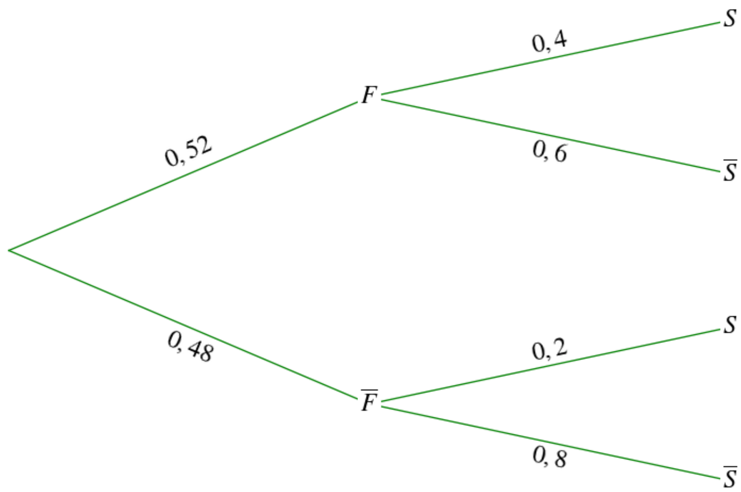
Comme $\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \dfrac{aire(ACH)\times BH}{3}$, alors

$aire(ACH) = \dfrac{3\times\mathcal{V}}{BH} = \dfrac{3\times\dfrac{8}{9}}{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{8}{3}} = 1$. Donc **l'aire du triangle *ACH* est égale à 1 unité d'aire**.

Exercice 3

1) a) Comme le stage a été suivi par 25 % des salariés, alors $\boldsymbol{p(S) = 0{,}25}$.

b)



c) On cherche $p(F\cap S)$. Or $p(F\cap S) = 0{,}52\times 0{,}4 = 0{,}208$.

Donc **la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208**.

d) On cherche $p_S(F)$. Or $p_S(F) = \dfrac{p(F\cap S)}{p(S)} = \dfrac{0{,}208}{0{,}25} = 0{,}832$.

Sachant que la personne interrogée ait suivi le stage, la probabilité que ce soit une femme est égale à 0,832.

e) On cherche $p_{\overline{F}}(S)=\dfrac{p(\overline{F}\cap S)}{p(\overline{F})}$.

Or, d'après la formule des probabilités totales, $p(S)=p(F\cap S)+p(\overline{F}\cap S)$, c'est-à-dire $p(S)=p(F\cap S)+p_{\overline{F}}(S)\times p(\overline{F})$.

Par suite, $0,25=0,208+p_{\overline{F}}(S)\times 0,48$; d'où : $p_{\overline{F}}(S)=\dfrac{0,25-0,208}{0,48}=0,0875$.

On en déduit que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, 8,75 % ont suivi le stage.
Le directeur a donc raison.

2) a) Choisir un employé ayant suivi le stage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0,25$.
Cette épreuve est répétée 20 fois de façon identique et indépendante.
Donc **X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0,25)$**.

b) $\boldsymbol{p(X=5)}=\binom{20}{5}\times(0,25)^5\times(1-0,25)^{20-5}=\text{binomFdp}(20,0.25,5)\approx\mathbf{0,202}$.

La probabilité que la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est égale à 0,202.

c) **La valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit `proba(5)` dans la console Python est 0,617.**
La probabilité qu'au plus 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est égale à 0,617.

d) On cherche $p(X\geq 6)$. Or $p(X\geq 6)=1-p(X\leq 5)=1-0,617=0,383$.
Donc **probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est égale à 0,383.**

3) $\left(1+\dfrac{5}{100}\right)\times 0,25+\left(1+\dfrac{2}{100}\right)\times(1-0,25)=1,0275$.

Or $(1,0275-1)\times 100=2,75$; donc **le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions est de 2,75 %.**

Exercice 4

1) $f(x)=\dfrac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ (par somme de limites). Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$ (par quotient de limites).

On en déduit que la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. **La réponse correcte est la c.**

2) On peut exclure les réponses a. et b. puisqu'avec la fonction F du a. $F(0)=0$ et avec celle du b. on obtient $F(0)=\frac{1}{2}$.

Vérifions si la fonction F du d. est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On a $F=\frac{1}{2}\times e^{u}+\frac{1}{2}$ avec $u(x)=x^2$.

D'où $F'=\frac{1}{2}\times u'\times e^{u}+0$ avec $u'(x)=2x$.

Donc, pour tout réel x, $F'(x)=\frac{1}{2}\times 2x\times e^{x^2}=xe^{x^2}=f(x)$. **La réponse correcte est donc la d.**

3) Comme la fonction f' est croissante sur $[0\ ;\ 2]$, alors la fonction f est convexe sur $[0\ ;\ 2]$.
La réponse correcte est la c.

4) Soit F une primitive quelconque de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout réel x, $F'(x)=f(x)=3e^{-x^2}+2$. Or $3e^{-x^2}+2>0$ pour tout réel x.

Par suite, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **La réponse correcte est donc la a.**

5) $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{\ln(x)}{x^2}\times\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{x^2}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)=3$ (par somme de limites).

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$ (par quotient de limites).

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ (croissances comparées). Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (par produit de limites).
La réponse correcte est donc la d.

6) $e^{2x}+e^{x}-12=0$ équivaut à $\left(e^{x}\right)^2+e^{x}-12=0$.

Posons $X=e^{x}$; on obtient alors l'équation $X^2+X-12=0$.
$\Delta=1^2-4\times1\times(-12)=49$; alors l'équation $X^2+X-12=0$ admet deux solutions :

$X_1=\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2\times1}=-4$ et $X_2=\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\times1}=3$.

D'où $e^{x}=-4$ (ce qui est impossible), et $e^{x}=3$, c'est-à-dire $x=\ln(3)$.

L'équation $e^{2x}+e^{x}-12=0$ admet donc une seule solution $\ln(3)$.

La réponse correcte est donc la c.