

# APPROXIMATION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE PAR LA MÉTHODE D'EULER

**Séance informatique**

**Terminale S**

Nous appellerons  $f$  la fonction exponentielle, c'est-à-dire la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ . Cherchons une représentation approchée de la fonction exponentielle à partir du point  $A(0 ; 1)$ .

1) Montrer que, pour tous réels  $a$  et  $h$  ( $h$  voisin de 0), l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit :  $f(a+h) \approx f(a)(1+h)$ .

2) a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f(a+nh) \approx (1+h)^n f(a)$ .

b) Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$  par  $u_n = (1+h)^n f(a)$ .

Quelle est la nature de  $(u_n)$  ?

3) Dans la suite, on prendra  $a = 0$ .

a) Posons  $x = nh$ . Montrer que pour  $n$  assez grand,  $f(x) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

4) À l'aide d'un tableur, déterminer une approximation de  $f(0,5)$ ,  $f(1)$ ,  $f(1,5)$ ,  $f(2)$  en choisissant successivement comme pas : 0,5 ; 0,1 ; 0,01.

Exemple : pour un pas de 0,5, on obtient l'écran suivant :

	A	B	C	D
1	h	x	valeur approchée de f(x)	
2	0,5	0	1	
3		0,5	1,5	
4		1	2,25	
5		1,5	3,375	
6		2	5,0625	

On introduit les valeurs initiales dans la ligne 2, puis on rentre les formules :

- en **B3** : = B2 + \$A\$2
- en **C3** : = C2 \* (1 + \$A\$2)

5) À l'aide d'un tableur, tracer une représentation graphique approchée de la courbe de  $f$  sur  $[0 ; 2]$  avec un pas de 0,5, puis de 0,1 et enfin de 0,01.

Exemple : pour un pas de 0,5, après avoir sélectionné les séries B2-B6 et C2-C6, l'assistant graphique du logiciel nous donne la courbe suivante :

