Partie A

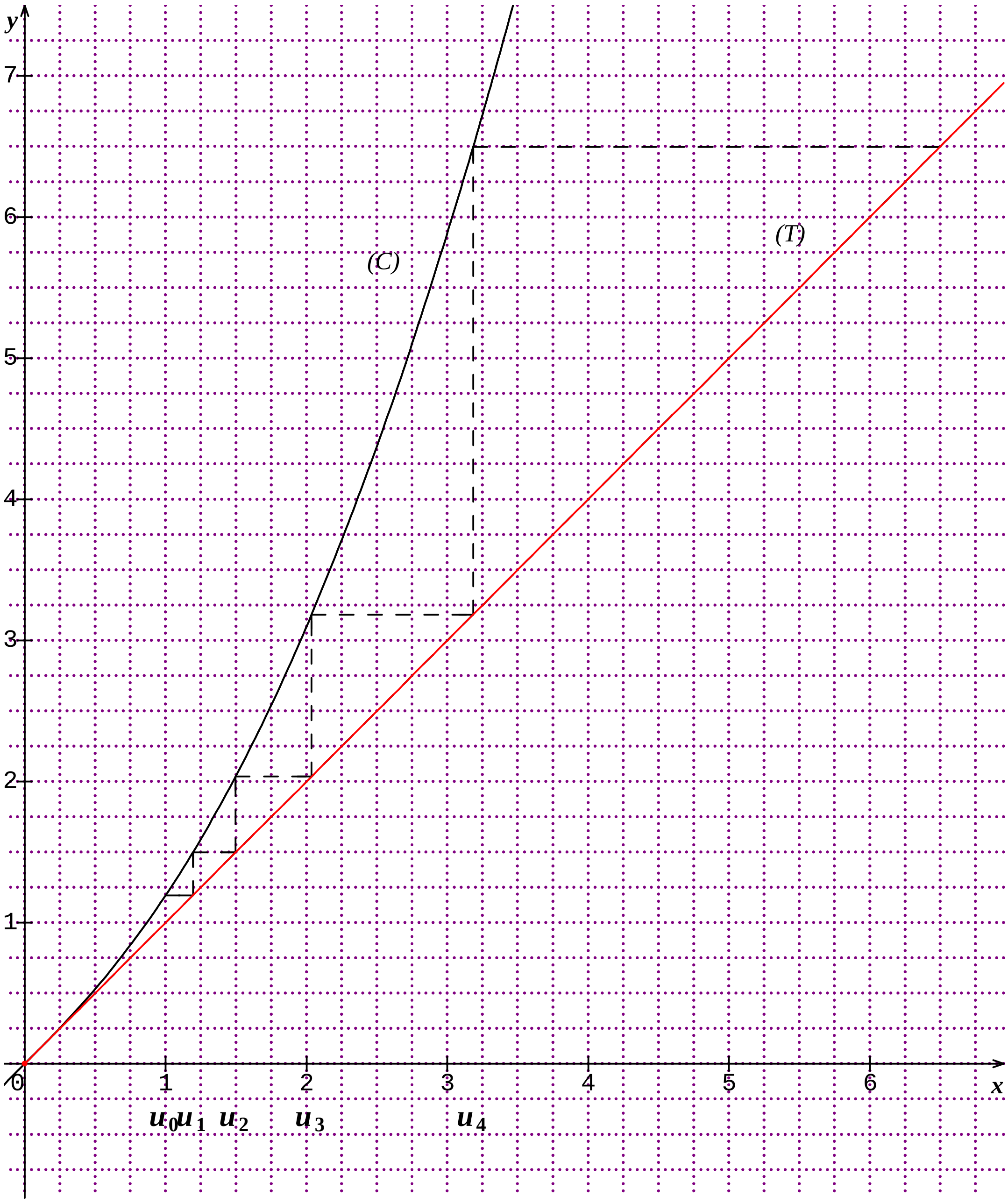
Soit une suite (u_n) non majorée et croissante, et A un réel arbitraire.
Comme la suite est non majorée, il existe au moins un terme u_p de la suite tel que $u_p > A$.
Or la suite étant croissante, si l'on prend n supérieur à p, on aura u_n supérieur à u_p, c'est-à-dire, u_n supérieur à A.
Donc on a prouvé que, à partir du terme u_p, tous les termes de la suite sont supérieurs à A.
C'est la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1) On a $f = \ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.
La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$; de plus, la fonction v est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Donc f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Soit un réel x positif. $f' = \frac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = x$.
D'où $f'(x) = \frac{1}{x+1} + x$. Comme x est positif, $\frac{1}{x+1}$ est positif. Par suite, $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, **la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$**.

2) (T) a une équation de la forme $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Or $f'(0) = \frac{1}{0+1} + 0 = 1$ et $f(0) = \ln(1) + 0 = 0$. Donc **(T) a pour équation $y = x$**.

3)



Partie C

1) Voir figure ci-dessus.

2) **D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.**

3) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $u_n \geq 1$ »

$\rightarrow$ Comme $u_0 = 1$, alors on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

$\rightarrow$ Montrons que pour tout $n \geq 0$, on a : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n \geq 1$.
Comme f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors $f(u_n) \geq f(1)$, c'est-à-dire

$u_{n+1} \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$. Or $\ln 2 + \frac{1}{2} \simeq 1{,}2$ Donc : $u_{n+1} \geq 1$. On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :
$\mathscr{P}(0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :
pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathscr{P}(n)$ est vraie
C'est-à-dire : **pour tout *n* de N, $u_n \geq 1$.**

b) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
Or $u_n \geq 1$ pour tout n de **N**, d'après la **partie B**, on en déduit que $f(u_n) \geq u_n$ (en effet, la courbe (C) est au-dessus de (T) sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[1\ ;\ +\infty[$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n de **N**. Par conséquent, **la suite (u_n) est croissante**.

d) La suite (u_n) est donc croissante et non majorée ; d'après la **partie A**, on en déduit que **la suite (u_n) tend vers $+\infty$**.