Exercice donné au Liban en juin 2008

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »

Démontrer le théorème suivant : Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$.

La courbe (C) représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

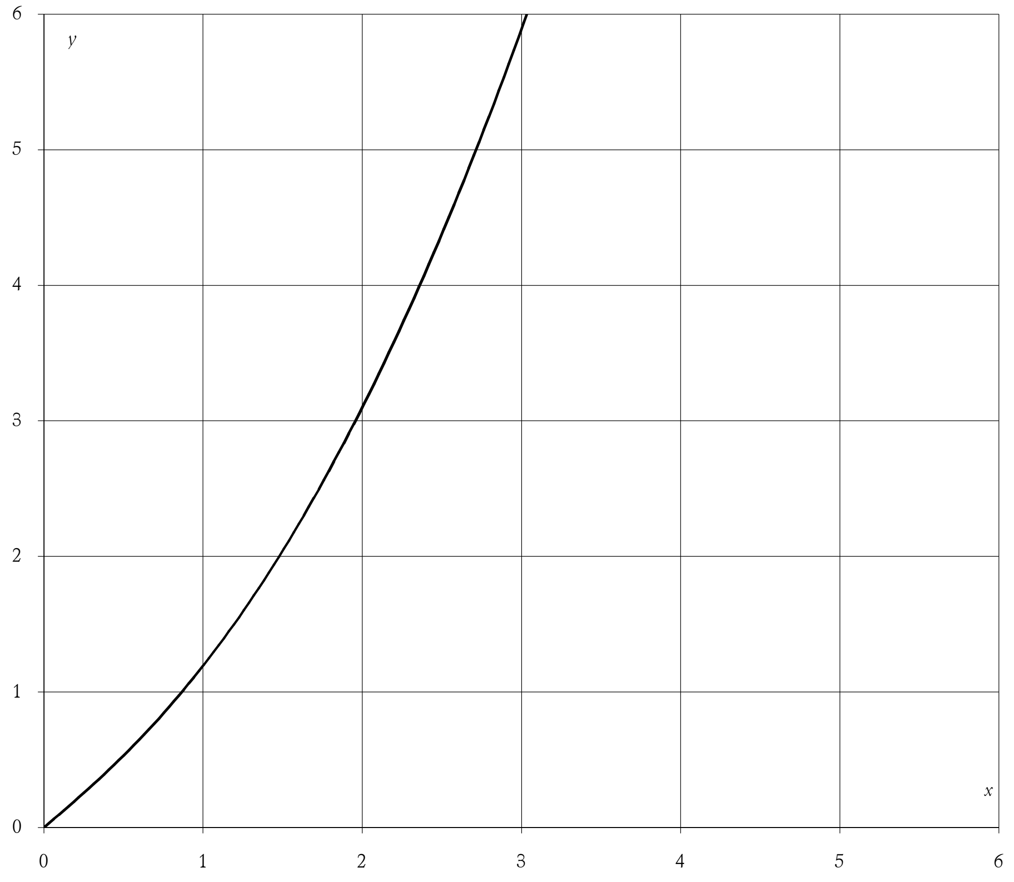
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=1$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque *n* tend vers $+\infty$?
3. a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).


y
x
0
1
2
3
4
5
6
0
1
2
3
4
5
6