X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ donc la suite de variables aléatoires $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ tend vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. Par suite, d'après le théorème de Moivre-Laplace, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$, pour tous réels a et b (avec $a < b$).

Or $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{n\left(\dfrac{X_n}{n} - p\right)}{n\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{F_n - p}{\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p + a\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + b\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

Comme, pour tout réel α de $]0\ ;\ 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ où X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, on a :
$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = 1 - \alpha$.

En prenant $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$.