

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. a. f est continue sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

b. $f'(t) = \frac{e^t t - e^t}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}$; e^t et t^2 sont évidemment positifs, $t-1$ l'est également lorsque $t \geq 1$. Donc f est croissante sur $[1; +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

a. $A(1)$ vaut 0.

b. Sur $[1; +\infty[$ f est croissante ainsi que A . La différence $A(x_0 + h) - A(x_0)$ représente l'aire de la bande sous la courbe de f , comprise entre les droites $x = x_0$ et $x = x_0 + h$: cette bande a une aire supérieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur h , et inférieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0 + h)$ et de largeur h . On a donc

$$hf(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq f(x_0 + h)h$$

d'où l'encadrement demandé en divisant par h puisque h est positif.

c. Si on prend $h < 0$, ça ne change pas grand-chose sur le fond, il y a surtout des questions de signes à respecter : la bande sous la courbe de f a pour aire $A(x_0) - A(x_0 + h)$, le rectangle inférieur a pour aire $f(x_0 + h)(-h)$ et le rectangle supérieur a pour aire $f(x_0)(-h)$; on a donc

$(-h)f(x_0 + h) \leq A(x_0) - A(x_0 + h) \leq (-h)f(x_0) \Leftrightarrow hf(x_0 + h) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq hf(x_0)$, soit

$$f(x_0 + h) \geq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \geq f(x_0)$$

en divisant par h (attention au changement de sens des inégalités : h est négatif).

d. On a le même encadrement pour h positif ou négatif, on peut passer à la limite lorsque h tend vers 0, ce qui donne $f(x_0) \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \geq f(x_0) \Rightarrow A'(x_0) = f(x_0)$ puisqu'on retrouve le nombre dérivé de A au milieu de l'encadrement.

e. Conclusion du cours : l'aire sous la courbe de f entre $x = 1$ et $x = x_0$ est obtenue en trouvant une primitive de f (la fonction A) telle que $A(1) = 0$.