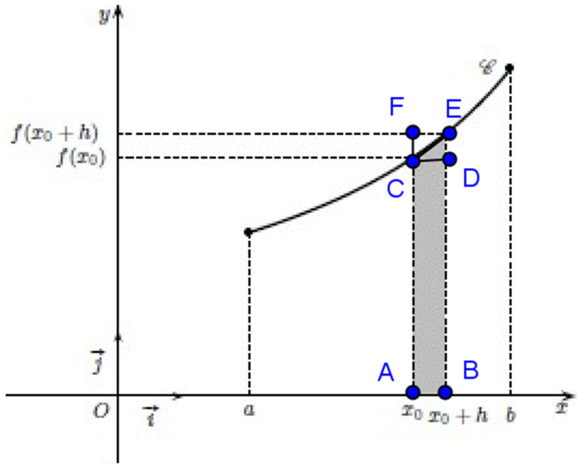
Démonstration dans le cas où f est positive et croissante : Soit $x_0 \in [a\,;\,b]$ et h un réel non nul tel que $(x_0+h) \in [a\,;\,b]$.

● **Si $h>0$** : Par définition, $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par suite, $F(x_0+h)-F(x_0)$ est l'aire de la partie grisée ci-contre.

Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABCD.
Or l'aire du rectangle ABCD est égale à $h\times f(x_0)$, et celle du rectangle ABCD est égale à $h\times f(x_0+h)$.

On en déduit alors que :
$h\times f(x_0)\le F(x_0+h)-F(x_0)\le h\times f(x_0+h)$



Comme $h>0$, on obtient : $f(x_0)\le \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\le f(x_0+h)$.

Or f est continue sur $[a\,;\,b]$, donc en x_0, alors $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

● **Si $h<0$** : par un raisonnement analogue, on obtient :

$$-h\times f(x_0+h)\le F(x_0)-F(x_0+h)\le -h\times f(x_0).$$

Comme $-h>0$, alors $f(x_0+h)\le \dfrac{F(x_0)-F(x_0+h)}{-h}\le f(x_0)$, ou encore

$f(x_0+h)\le \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\le f(x_0)$. Par conséquent, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

● Finalement, f est dérivable pour tout x_0 de $[a\,;\,b]$, et $F'(x_0)=f(x_0)$.