

1) Propriété

Propriété 1 : S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.

Démonstration : Soit g la fonction définie dans $\mathbf{R}$, par $g(x) = f(x) \times f(-x)$. En utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée, on a :

$$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x).$$

Puisque $f' = f$, $g'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$ pour tout réel x .

La fonction g est donc constante et, comme $f(0) = 1$, $g(0) = f(0) \times f(0) = 1$. Ainsi, pour tout réel x , $g(x) = 1$.

S'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$, alors, puisque $g(x) = f(x) \times f(-x)$, $g(a)$ serait égal à 0, ce qui est en contradiction avec $g(x) = 1$ pour tout réel x .

La fonction f ne peut donc pas s'annuler.

2) Théorème

Théorème 1 : Il existe une, et une seule, fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration : L'existence d'une telle fonction est admise.

Voici la démonstration de l'unicité : soit h une autre fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$.

On a démontré que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Par suite, $\frac{h}{f}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. De

plus, $\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{h'f - hf'}{f^2} = 0$. La fonction $\frac{h}{f}$ est donc constante.

D'où $h = kf$; ainsi, $h(0) = kf(0)$, c'est-à-dire $1 = k \times 1$. Donc $k = 1$, et par conséquent $h = f$.