

Une *exsanguino-transfusion* peut se schématiser de la façon suivante : un récipient R contient un liquide L dans lequel se trouve une substance S dont on veut diminuer la concentration. Le volume de R est de  $p$  litres (genre le corps humain...) et la concentration initiale de S est de  $a$  gramme par litre dans L.

1. *Première méthode* : on injecte dans R de manière continue du liquide L ne contenant pas la substance S et on prélève simultanément la même quantité de mélange par un tuyau de sortie de sorte que le volume de liquide dans R reste constant. Les tuyaux d'arrivée et de sortie ont des débits de  $d$  litres par heure.

On note  $m(t)$  la quantité de S dans L au bout du temps  $t$  et  $C(t)$  sa concentration.

a. Montrer que  $m(t+h) - m(t) = -dhC(t)$  ; en déduire que  $m'(t) = -dC(t)$  puis que  $C'(t) = -\frac{d}{p}C(t)$  (E).

b. **Démontrer** que l'unique solution de (E) est  $C(t) = a \exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$ .

c. Au bout de combien de temps la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. Cette méthode permet-elle d'éliminer complètement S ?

2. *Deuxième méthode* : toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe  $q$  de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S. A la minute  $n$  on appelle  $m_n$  la masse de S restant dans R et  $C_n$  sa concentration.

a. Exprimer en fonction de  $n$  et des autres paramètres la masse  $\Delta m_n$  de S prélevée à la minute  $n$ .

b. Exprimer  $m_{n+1}$  en fonction de  $m_n$  puis  $C_{n+1}$  en fonction de  $C_n$ . En déduire  $C_n$  en fonction de  $n$ ,  $a$ ,  $p$  et  $q$ .

c. Au bout de combien de minutes la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. En posant  $n = 60t$  donner une expression de  $C_n$ . Comparer au résultat du 1.