$E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$.

Soit g la fonction définie sur **R** par $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Alors, pour tout réel t positif, $g'(t) = \lambda e^{-\lambda t} + \lambda t \times (-\lambda) e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda g(t)$.

Par suite, $g(t) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t} - g'(t)}{\lambda} = e^{-\lambda t} - \dfrac{1}{\lambda} g'(t)$.

On en déduit que $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-\lambda t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\lambda} g'(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x - \left[\frac{1}{\lambda} g(t)\right]_0^x$

$$= \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\frac{1}{\lambda} g(x) - \frac{1}{\lambda} g(0)\right) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \lambda x e^{-\lambda x} + 0$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda x} + 1 - \lambda x e^{-\lambda x}\right)$$

Posons $Y = -\lambda x$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} Y = -\infty$ et $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\lambda}\left(-e^{Y} + 1 - Y e^{Y}\right)$.

Or $\lim\limits_{Y \to -\infty} e^{Y} = 0$ et $\lim\limits_{Y \to -\infty} Y e^{Y} = 0$; d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\lambda}$ (par somme et produit de limites).