DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Probabilités, géométrie dans l'espace fonctions, intégration, suites | ***Le 15 mai 2019***

Exercice 1 (6 *points*)

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A : Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée E(X), est égale à :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 0,2te^{-0,2t}\mathrm{d}t\,.$$

Le but de cette partie est de démontrer que E(X) = 5.

1) On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=0,2te^{-0,2t}$.

On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $G(t)=(-t-5)e^{-0,2t}$.

Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) En déduire que la valeur exacte de E(X) est 5.

Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty} xe^{-0,2x}=0$.

Partie B : Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $P(T<10)=0,067$ P(T < 10) = 0,067.

1) Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

2) Dans cette question, on prend $\sigma=20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C : Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1) La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2 min^{-1}.

a) Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2) L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
• parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86% attendent moins de 10minutes ;
• parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.
On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :
B : « le client paye à une borne automatique » ;
$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D : Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1) Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.
Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

2) À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

<u>Exercice 2</u> *(5 points)*

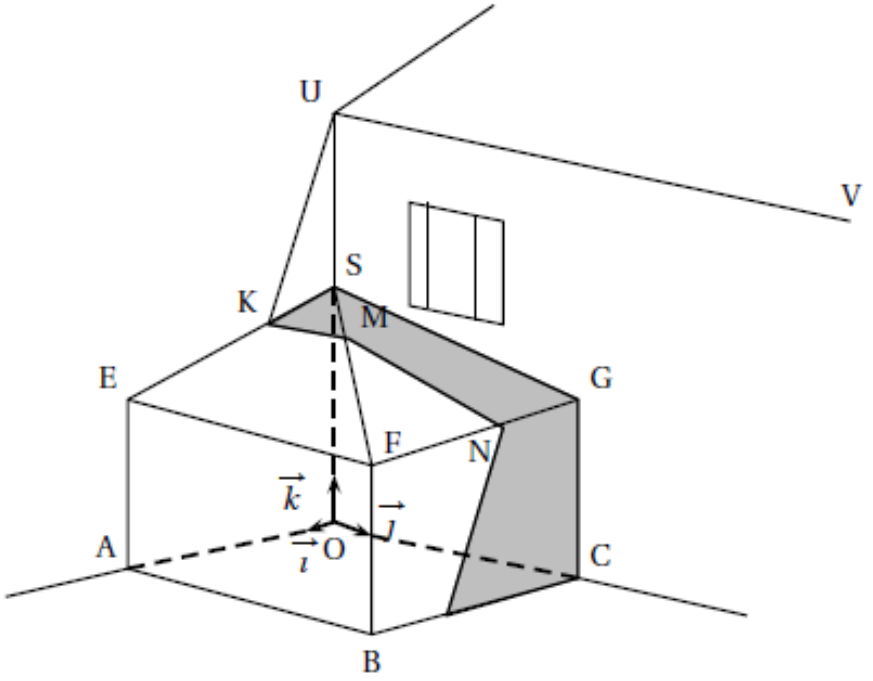
Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

• Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.

• Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).

• Les arêtes $[\text{UV})$ et $[\text{EF}]$ des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment $[\text{SE}]$, le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1) Sans calcul, justifier que :

a) le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$;

b) le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.

2) Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les coordonnées des différents points sont les suivantes :
$A(4 ; 0 ; 0)$, $B(4 ; 5 ; 0)$, $C(0 ; 5 ; 0)$, $E(4 ; 0 ; 2{,}5)$, $F(4 ; 5 ; 2{,}5)$, $G(0 ; 5 ; 2{,}5)$, $S(0 ; 0 ; 3{,}5)$, $U(0 ; 0 ; 6)$ et $V(0 ; 8 ; 6)$.

On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont $(1{,}2 ; 0 ; 3{,}2)$.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

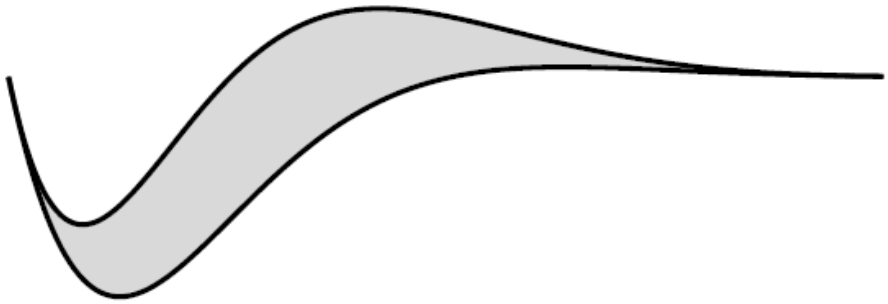
c) Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

d) Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

3) Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Exercice 3 (4 *points*)

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur **R** par :
$f(x) = e^{-x}\left(-\cos(x) + \sin(x) + 1\right)$ et $g(x) = -e^{-x}\cos(x)$.

Partie A : Étude de la fonction f

1) Justifier que, pour tout x de **R**, $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Démontrer que, pour tout x de **R**, $f'(x) = e^{-x}\left(2\cos(x) - 1\right)$ où f' est la fonction dérivée de f.

4) Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

b) En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B : Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.

L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur **R**.

2) Soit H la fonction définie sur **R** par : $H(x)=\left(-\dfrac{\cos(x)}{2}-\dfrac{\sin(x)}{2}-1\right)e^{-x}$.

On admet que H est une primitive de la fonction $x\mapsto\left(\sin(x)+1\right)e^{-x}$ sur **R**.

On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

<u>Exercice 4</u> (5 *points*)

Les deux graphiques donnés en annexe seront à compléter et à rendre avec la copie

Un scooter radio commandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 m.s^{-1}.
Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse.

On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x=5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

Partie A : modélisation à l'aide d'une suite

La situation est représentée par le graphique n° 1 donné en annexe.
À l'instant initial, le scooter est représenté par le point S_0. Le chien qui le poursuit est représenté par le point M_0.

On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.
Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point S_0, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point M_1. À cet instant, le scooter est au point S_1.
Le chien s'oriente en direction de S_1 et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.
On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées $\left(M_n\right)$ et $\left(S_n\right)$.

Au bout de n secondes, les coordonnées du point S_n sont $\left(5\,;\,n\right)$. On note $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ les coordonnées du point M_n.

1) Construire sur le graphique n° 1 donné en annexe les points M_2 et M_3.

2) On note d_n la distance entre le chien et le scooter n secondes après le début de la poursuite. On a donc $d_n=M_nS_n$.
Calculer d_0 et d_1.

3) Justifier que le point M_2 a pour coordonnées $\left(1+\frac{4}{\sqrt{17}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4) On admet que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{5-x_n}{d_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{n-y_n}{d_n} \end{cases}$.

a) Le tableau ci-dessous, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points M_n et S_n ainsi que la distance d_n en fonction de n. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	M_n		S_n		d_n
2		x_n	y_n	5	n	
3	0	0	0	5	0	5
4	1	1	0	5	1	4,123 105 63
5	2	1,970 142 5	0,242 535 63	5	2	3,502 672 91
6	3	2,835 155 47	0,744 285 12	5	3	3,126 467 89
7	4	3,527 580 47	1,465 774 98	5	4	2,930 924 04
…	…	…	…	…	…	…
28	24	4,999 797 51	21,226 834 2	5	24	2,773 165 8
29	25	4,999 870 53	22,226 834 2	5	25	2,773 165 8

b) On admet que la suite (d_n) est strictement décroissante.

Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

Partie B : modélisation à l'aide d'une fonction

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe $\mathcal{F}$ de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5[$ par $f(x) = -2{,}5\ln(1-0{,}2x) - 0{,}5x + 0{,}05x^2$.
Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe $\mathcal{F}$ de la fonction f.

1) Lorsque le chien se trouve au point M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ de la courbe $\mathcal{F}$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 5[$, le scooter se trouve au point S, d'ordonnée notée y_S.
Ainsi le point S a pour coordonnées $(5\ ;\ y_S)$. La tangente à la courbe $\mathcal{F}$ au point M passe par le point S. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note $d(x)$ la distance MS entre le chien et le scooter lorsque M a pour abscisse x.

a) Sur le graphique n° 2 donné en annexe, construire, sans calcul, le point S donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathcal{F}$ et lire les coordonnées du point S.

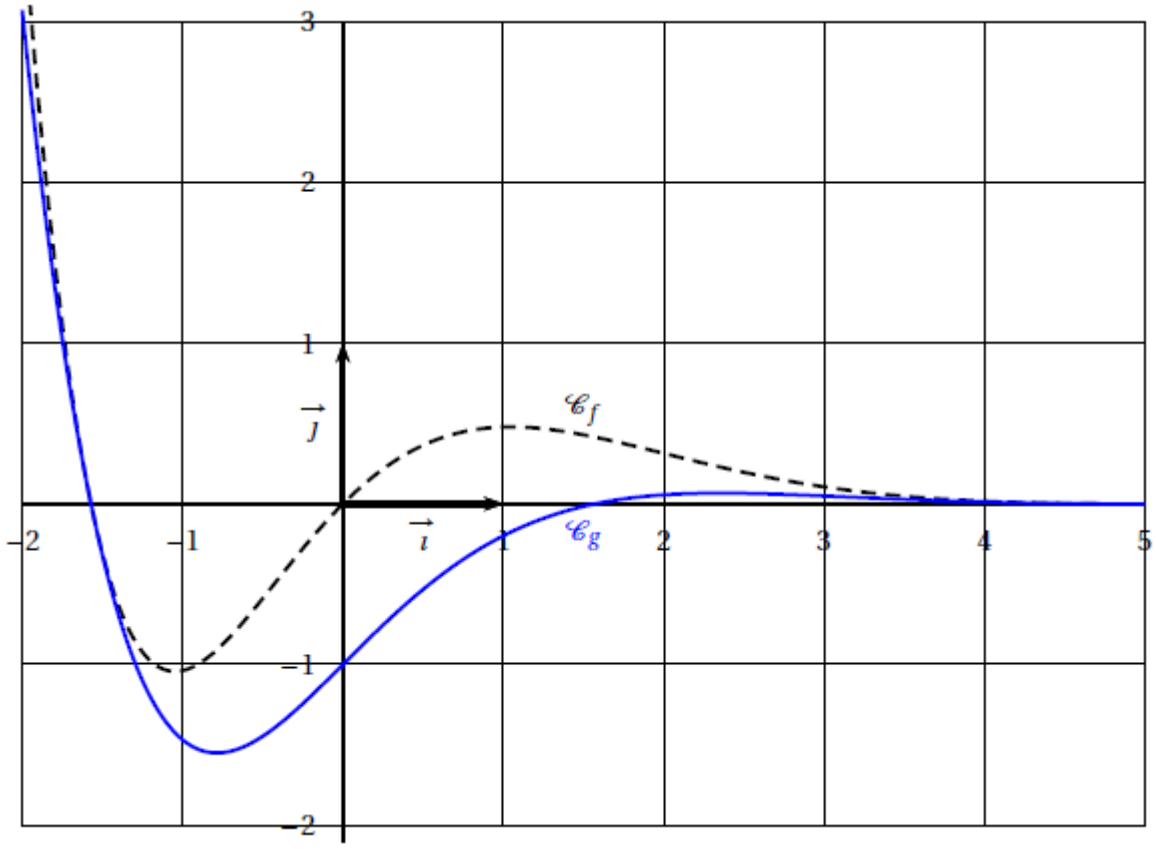
b) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5[$ et on admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5[$: $f'(x) = \dfrac{x(1-0{,}1x)}{5-x}$.

Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathcal{F}$.

2) On admet que $d(x) = 0{,}1x^2 - x + 5$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5[$.

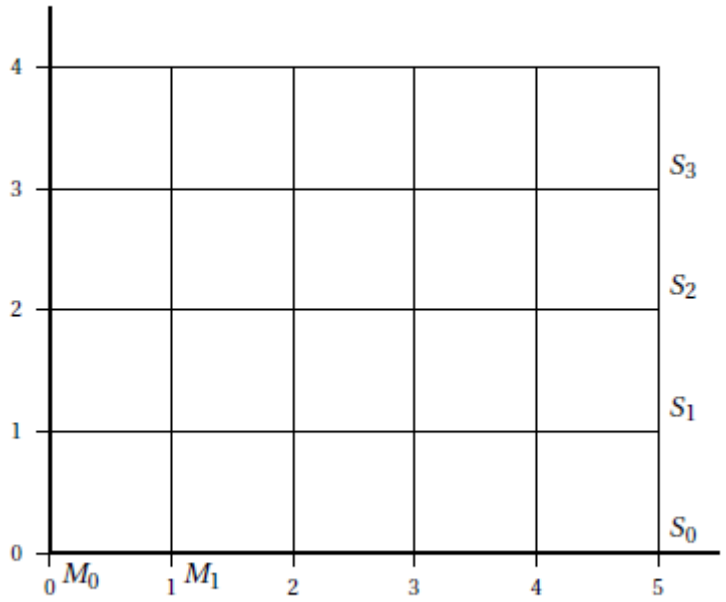
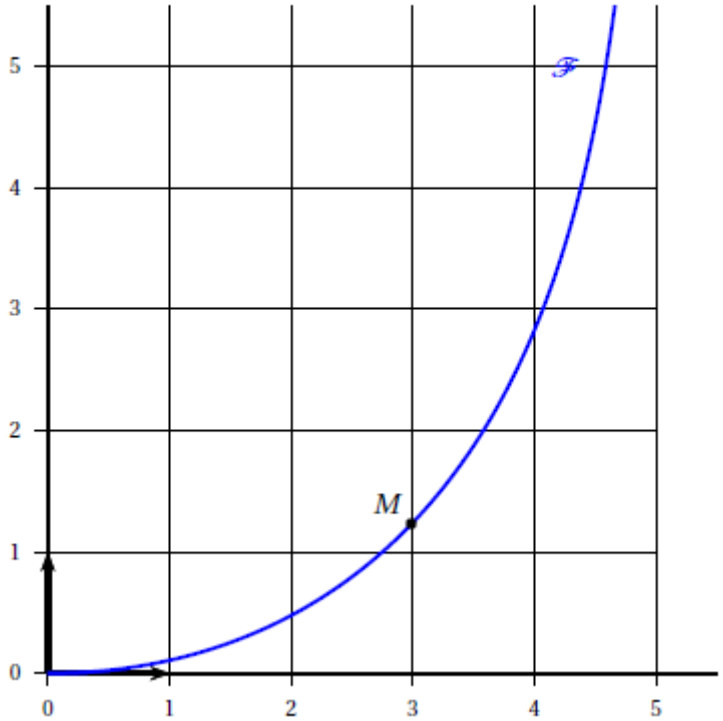
Justifier qu'au cours du temps la distance MS se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

À rendre avec la copie EXERCICE 3



À rendre avec la copie EXERCICE 4

Partie A, question 1
Graphique n° 1



Partie B, question 1
Graphique n° 2