CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, probabilités conditionnelles, loi binomiale	***Le 5 décembre 2018***

Exercice 1

Soient deux événements A et B indépendants.

$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) \times P_B\left(\overline{A}\right) = P(B) \times \left(1 - P_B(A)\right)$.

Comme A et B sont indépendants, alors $P_B(A) = P(A)$.

D'où $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) \times \left(1 - P(A)\right) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right)$, c'est-à-dire $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Exercice 2

1) $p(\mathrm{B}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $p(\mathtt{I}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $p(\mathrm{B} \cap \mathtt{I}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

D'où $p(\mathrm{B}) \times p(\mathtt{I}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \neq p(\mathrm{B} \cap \mathtt{I})$. Par conséquent, **les événements R et $\mathtt{I}$ ne sont pas indépendants**.

2) Soit x le nombre de jetons bleus numérotés 1   pour que les évènements B et $\mathtt{I}$ soient indépendants. On obtient alors : $p(\mathrm{B}) = \frac{4+x}{10+x}$; $p(\mathtt{I}) = \frac{6+x}{10+x}$ et $p(\mathrm{B} \cap \mathtt{I}) = \frac{2+x}{10+x}$.

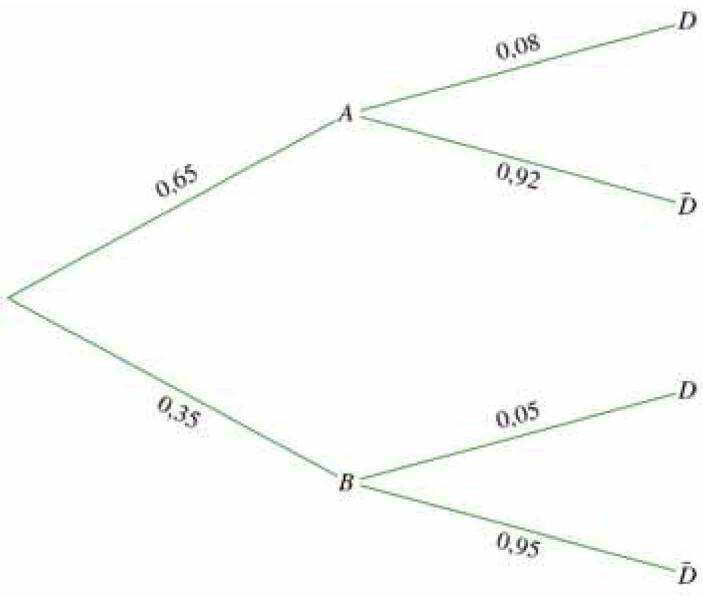
B et $\mathtt{I}$ soient indépendants équivaut à $\frac{4+x}{10+x} \times \frac{6+x}{10+x} = \frac{2+x}{10+x}$.

Or $\frac{4+x}{10} \times \frac{6+x}{10} = \frac{2+x}{10}$ équivaut à $(4+x)(6+x) = (10+x)(2+x)$, c'est-à-dire à $x^2 + 10x + 24 = x^2 + 12x + 20$, ou encore à $4 = 2x$.

Par conséquent, **il faut rajouter deux jetons bleus numérotés 1 pour que les évènements B et $\mathtt{I}$ soient indépendants**.

Exercice 3

1) a)



b) On recherche $p\left(B\cap\overline{D}\right)$. Or $p\left(B\cap\overline{D}\right)=p(B)\times p_B\left(\overline{D}\right)=0{,}35\times0{,}95=0{,}3325$.

La probabilité de tirer une ampoule sans défaut qui provienne de la machine B est égale à 0,3325.

c) On recherche $p\left(\overline{D}\right)$.

Or $p\left(\overline{D}\right)=p\left(A\cap\overline{D}\right)+p\left(B\cap\overline{D}\right)=p(A)\times p_A\left(\overline{D}\right)+0{,}3325=0{,}65\times0{,}92+0{,}3325=0{,}9305$.

Donc **la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305**.

d) On recherche $p_{\overline{D}}(A)$. Or $p_{\overline{D}}(A)=\dfrac{p\left(A\cap\overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)}=\dfrac{0{,}598}{0{,}9305}\approx0{,}6427$.

Sachant que l'ampoule tirée est sans défaut, la probabilité qu'elle provienne de la machine A est égale à environ 0,6427.

2) a) Prélever une ampoule sans défaut est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=p_A\left(\overline{D}\right)=0{,}92$.

Cette épreuve est répétée 10 fois de façon indépendante et identique.
Donc **X suit la binomiale de paramètres $\mathscr{B}(10\ ;\ 0{,}92)$**.

b) $P(X=7)=\dbinom{10}{7}\times(0{,}92)^7\times(1-0{,}92)^{10-7}\approx0{,}0343$.

La probabilité d'obtenir exactement 7 ampoules sans défaut est égale à environ 0,0343.

c) $P(X\geq9)=P(X=9)+P(X=10)=\dbinom{10}{9}\times(0{,}92)^9\times(0{,}08)^1+(0{,}92)^{10}\approx0{,}8121$.

La probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut est égale à environ 0,8121.

d) Obtenir au moins 2 ampoules présentant un défaut revient à obtenir au plus 8 ampoules ne présentant aucun défaut.
Or $P(X\leq8)=1-P(X\geq9)\approx1-0{,}8121\approx0{,}1879$.

La probabilité d'obtenir au moins 2 ampoules présentant un défaut est égale à environ 0,1879.

Exercice 4

1) $g(x)=-2x^3+9x^2-10x+4=-2x^3\left(1-\dfrac{9}{2x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{2x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{9}{2x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)=1$ (par somme de limites)

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$ (par produit de limites).

2) et 3) g est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur **R**.
Pour tout réel x, $g'(x)=-6x^2+18x-10$.

Calculons Δ : $\Delta=18^2-4\times(-6)\times(-10)=324-240=84$.

Comme $\Delta>0$, le trinôme $-6x^2+18x-10$ a deux racines :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-18-\sqrt{84}}{-12}=\dfrac{-18-2\sqrt{21}}{-12}=\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-18+2\sqrt{21}}{-12}=\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$.

D'où le trinôme $-6x^2+18x-10$ est négatif à « l'extérieur » de ses racines et positif à « l'intérieur » de ses racines.

On en déduit que :

x	0		$\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$		$\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$	~	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	4		$g(x_2)$		$g(x_1)$	0	$-\infty$

On a : $g(x_2) \approx 0{,}72$ et $g(x_1) \approx 4{,}28$.

4) a) D'après le tableau de variations précédent, $g(x_2) \approx 0{,}72$ est le minimum de g sur $[0\ ;x_1]$. Donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[0\ ;x_1]$.

La fonction g est continue, strictement décroissante sur $[x_2\ ;+\infty[$ et $0 \in g([x_2\ ;+\infty[)$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution ~ sur $[x_2\ ;+\infty[$.

Par conséquent, **l'équation $g(x)$ Z 0 admet une unique solution ~ sur $[$0 ;Hã$[$**.

b) En utilisant la calculatrice, on obtient : **3,09 Y ~ Y 3,1**.

5) D'après les questions précédentes, on en déduit que :

- si x Y ~ , $g(x)$ [0

- si x Z ~ , $g(x)$ Z 0

- si x [~ , $g(x)$ Y 0