CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, probabilités conditionnelles, loi binomiale	***Le 5 décembre 2018***

<u>Exercice 1</u>

Soient deux événements A et B indépendants.

$P\left(\overline{B}\cap A\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)\times P_A\left(\overline{B}\right)=P(A)\times\left(1-P_A(B)\right)$.

Comme A et B sont indépendants, alors $P_A(B)=P(B)$.

D'où $P\left(\overline{B}\cap A\right)=P(A)\times\left(1-P(B)\right)=P(A)\times P\left(\overline{B}\right)$, c'est-à-dire $\overline{B}$ et A sont indépendants.

Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{B}$ et A.

<u>Exercice 2</u>

1) $p(\mathrm{R})=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$; $p(\mathrm{I})=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$ et $p(\mathrm{R}\cap\mathrm{I})=\dfrac{2}{9}$.

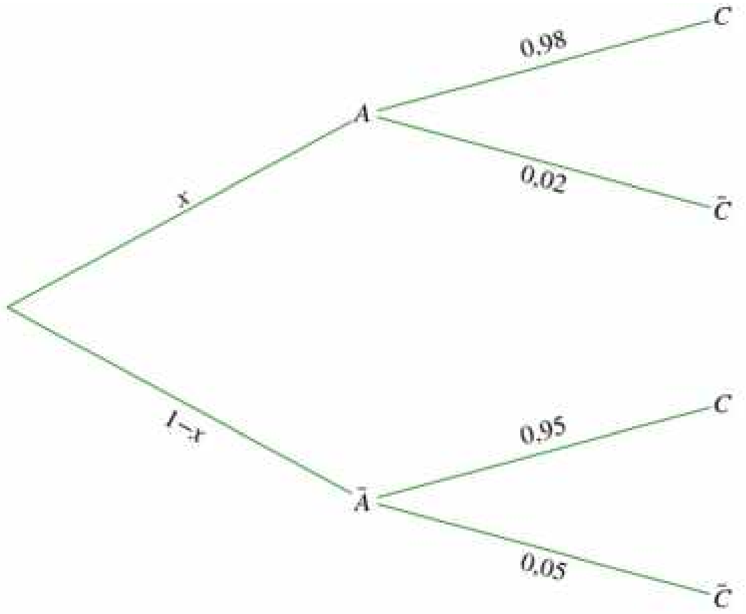
D'où $p(\mathrm{R})\times p(\mathrm{I})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}=p(\mathrm{R}\cap\mathrm{I})$. Par conséquent, **les événements R et I sont indépendants**.

2) $p(\mathrm{B})=\dfrac{4}{9}$; $p(\mathrm{I})=\dfrac{2}{3}$ et $p(\mathrm{B}\cap\mathrm{I})=\dfrac{2}{9}$.

D'où $p(\mathrm{B})\times p(\mathrm{I})=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}\neq p(\mathrm{B}\cap\mathrm{I})$. Par conséquent, **les événements B et I ne sont pas indépendants**.

<u>Exercice 3</u>

1)



$p(\mathrm{C})=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})+p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})=x\times 0{,}98+(1-x)\times 0{,}95$.

Donc $\boldsymbol{p(\mathrm{C})=0{,}03x+0{,}95}$.

2) $p(\mathrm{C}) = 0{,}96$ équivaut à $0{,}03x + 0{,}95 = 0{,}96$, c'est-à-dire à $0{,}03x = 0{,}01$.

D'où $p(\mathrm{C}) = 0{,}96$ équivaut à $x = \dfrac{0{,}01}{0{,}03} = \dfrac{1}{3}$.

Dans ce cas, $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Par suite, **la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A**.

3) a) Prélever une tablette de chocolat est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}96$.
Cette épreuve est répétée 10 fois de façon identique et indépendante.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0{,}96)$.

b) La probabilité que l'on trouve que des tablettes commercialisables est égale à $P(X = 10)$.

Or $P(X = 10) = \dbinom{10}{0} \times (0{,}96)^{10} \times (1 - 0{,}96)^{10-10} = (0{,}96)^{10} \approx 0{,}665$.

Donc, **la probabilité que l'on trouve que des tablettes commercialisables est égale à environ 0,665**.

c) L'événement « au moins 2 tablettes non commercialisables » est équivalent à l'événement « au plus 8 tablettes commercialisables ». On est amené à rechercher $P(X \leq 8)$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X \leq 8) \approx 0{,}058$.

La probabilité qu'il y ait au moins 2 tablettes non commercialisables est égale à environ 0,058.

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; d'où $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ (par produit et somme de limites).

$f(x) = x^3\left(2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 2$ (par somme de limites).

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ (par produit de limites).

2) La fonction f est dérivable sur **R** en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) La fonction admet un minimum 1 sur $[-1\,;+\infty[$; par suite, la fonction f ne s'annule pas sur cet intervalle.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$; 0 appartient à $]-\infty\,;\,2]$; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ une unique solution α dans $]-\infty\,;-1]$.

Par conséquent, **l'équation $2x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ admet sur R une unique solution α**.

En utilisant la méthode par balayage, on obtient :

x	$f(x)$
-3	-26
-2	-3
-1	2

x	$f(x)$
-2	-3
-1,9	-1,888
-1,8	-0,944
-1,7	-0,156
-1,6	0,488
-1,5	1
-1,4	1,392
-1,3	1,676
-1,2	1,864
-1,1	1,968
-1	2

$$\boxed{-1{,}7 < \alpha < -1{,}6}$$

4) **Si $k < 1$, l'équation $f(x) = k$ a une solution**.

Si $k = 1$, l'équation $f(x) = k$ a deux solutions.

Si $1 < k < 2$, l'équation $f(x) = k$ a trois solutions.

Si $k = 2$, l'équation $f(x) = k$ a deux solutions.

Si $k > 2$, l'équation $f(x) = k$ a une solution.