DEVOIR SURVEILLÉ N° 2	
Nombres complexes	***Le 17 octobre 2018***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (12 *points*)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i - (-2 + 3\,i)$

b) $z_2 = (2 - 15\,i)\overline{(-8 + i)}$

c) $z_3 = \left(\sqrt{3} - 5\,i\right)^2$

d) $z_4 = \dfrac{1 - 5\,i}{4 - 3\,i}$

2) Le nombre z s'écrit sous la forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

Si $z \neq i$, on pose $Z = \dfrac{z+1}{z-i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que Z soit un imaginaire pur.

3) On veut résoudre l'équation à coefficients réels (*E*) : $z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = 0$.
a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (*E*).
b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)\left(z^2 + az + b\right).$$

c) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (*E*).

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.
Soit *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives a, b et c où $a = 1$, $b = 2 + 2\,i$ et $c = 1 - i$.
a) Placer les points dans le plan complexe.
b) Déterminer la nature du triangle *OBC*.
c) Que représente la droite (OA) pour le triangle *OBC* ? Justifier
d) On donne le point *D* d'affixe 2. Quelle est la nature du quadrilatère *OCDB* ?

Exercice 2 (4 *points*) *Pondichéry, avril 2017*

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

1) On considère l'équation (E) : $z^2 - 6z + c = 0$, où c est un réel strictement supérieur à 9.

a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2) On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.

Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

<u>Exercice 3</u> (4 *points*)

Soient les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 6 + 3i$ et $z_C = -1 + 7i$.

1) a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points *M* d'affixe z tels que $|z - 2 - i| = |z - 6 - 3i|$.

Représenter (Δ) sur l'annexe.

b) Soit $E\left(\frac{5}{2} + 5i\right)$. Montrer que *E* est le milieu du segment $[BC]$.

2) a) Calculer la longueur *EB*.

b) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points *M* d'affixe z tels que $|z - z_E| = \frac{\sqrt{65}}{2}$

Représenter $(\mathscr{C})$ sur l'annexe.

c) Pourquoi les points *A*, *B* et *C* appartiennent-ils à $(\mathscr{C})$?