DEVOIR MAISON N° 8

Fonction exponentielle et intégration	***Pour le 4 mars 2019***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B : détermination d'une aire

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=t$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
2) On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?
3) On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x=\alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

a) Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Sur le graphique fourni ci-dessous sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.

Identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.

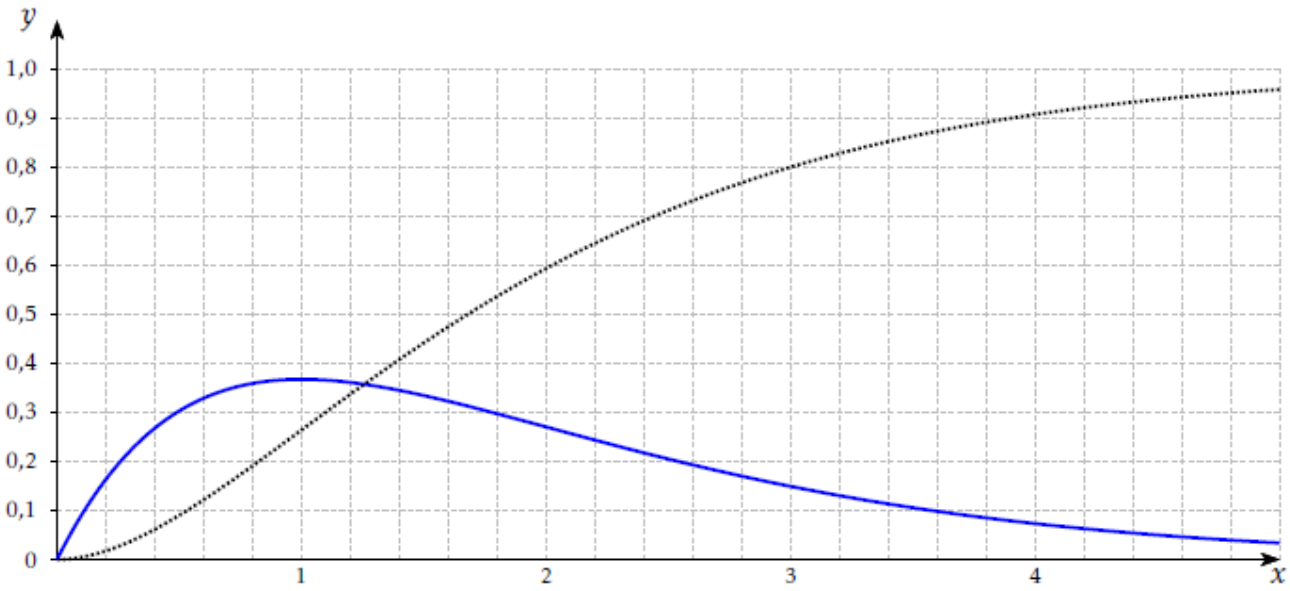
4) On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)e^{-x}$.

a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.

c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.


y
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
x